

OBRAS PUBLICADAS PELO AUTOR

Portaria Ministerial de 18 de abril de 1931

- Primeiro Ano de Matemática. *Dezenove edições*, 95 milheiros.
Volume cartonado . . . Cr.\$ 13,00
- Segundo Ano de Matemática. *Tres edições*, 65 milheiros.
Volume cartonado . . . Cr.\$ 14,00
- Terceiro Ano de Matemática. *Nove edições*, 45 milheiros.
Volume cartonado . . . Cr.\$ 15,00
- Quarto Ano de Matemática. *Seis edições*, 35 milheiros.
Volume cartonado . . . Cr.\$ 13,00
- Quinto Ano de Matemática. *Quatro edições*, 20 milheiros.
Volume cartonado . . . Cr.\$ 15,00
- Exercícios de Matemática — Terceiro Ano. 1 400 exercícios numéricos
e problemas, com os resultados. *Brochura* Cr.\$ 6,00
- Exercícios de Matemática — Quarto Ano. 900 exercícios numéricos
e problemas, com os resultados. *Brochura* Cr.\$ 5,00
- Exercícios de Matemática — Quinto Ano. 900 exercícios numéricos
e problemas, com os resultados. *Brochura* Cr.\$ 5,00

Portaria Ministerial de 11 de julho de 1942

- Elementos de Matemática, Primeiro Volume.
Dezesseis edições, 80 milheiros. Volume cartonado
- Elementos de Matemática, Segundo Volume.
Doze edições, 60 milheiros. Volume cartonado
- Elementos de Matemática, Terceiro Volume.
Nove edições, 45 milheiros. Volume cartonado
- Elementos de Matemática — Quarto Volume.
Seis edições, 30 milheiros. Volume cartonado
- Problemas de Matemática — Primeira Série Ginásial.
780 exercícios, com os resultados. *Brochura* Cr.\$ 6,00
- Problemas de Matemática — Segunda Série Ginásial.
750 exercícios, com os resultados. *Brochura* Cr.\$ 7,00

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
RUA DOS GUSMÕES, 639 — SÃO PAULO

SÉRIE 2.^a LIVROS DIDÁTICOS
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

VOL. 126

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

TERCEIRO VOLUME

para a

Terceira Série do Curso Ginásial

Com numerosos exercícios orais e de classe;
850 exercícios escritos e problemas

*A Matemática é uma escada altíssima
cujos degraus, embora pequeninos, devem
ser subidos vagarosamente, e de um em um.*

11.^a edição — 53 milheiros

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
São Paulo - Rio de Janeiro - Recife - Bahia - Pará - Porto Alegre

1 9 4 7

V. J. M. J.

V. D. B.

Belém, 23 de março de 1936

Exmo. Sr. Prof. Jacomo Stávale

Saudações.

Entusiasmado pelo método pedagógico e didático dos livros publicados por V. S., venho hoje dar-lhe os meus efusivos parabens por obra tão útil ao ensino no nosso caro Brasil.

Sou professor de Matemática do Colégio Salesiano Nossa Senhora do Carmo, Belém, Pará. Já conhecedor, em Recife, dos livros e método de V. S., e tendo sido transferido para este Colégio como Diretor dos Estudos, sem mais adotei os preciosos livros didáticos de Matemática, da autoria de V. S. Sirva também a presente como um preito de justiça que há muito desejava externar, pelo grande auxílio que as obras de V. S. têm trazido às minhas aulas.

Aceite, pois, os entusiásticos parabens dêste humilde colega que tem a honra de se professar seu amigo e admirador

*(a) PADRE JOSÉ CARVALHO DE MENDONÇA
da Congregação Salesiana.*

*Encarregado dos Estudos no Colégio Salesiano
Nossa Senhora do Carmo, Belém - Pará*

Prefácio

*E' indigno de se chamar homem,
quem ignora que o lado e a diagonal
de um quadrado são grandezas in-
comensuráveis.*

Platão

Sem dúvida alguma, a transformação de um polinômio em um produto ou, como dizemos abreviadamente, a *fatoração algébrica*, é um dos assuntos de maior relevância em um curso de Álgebra. A fatoração algébrica é, para toda a Matemática, o que é a tabuada para o cálculo aritmético. Em Álgebra fazemos, a todo o instante, a transformação de uma expressão em outra equivalente; raramente operamos com estas mesmas expressões.

Daí a minha constante preocupação, quer como professor, quer como autor, em desenvolver tanto quanto possível, embora de um modo elementar, este magnífico instrumento de trabalho que é, para os estudantes de Matemática, a transformação de polinômios em produtos.

Seguindo esta orientação incluí no presente compêndio, um estudo muito elementar sobre a divisão de um polinômio por outro. Precisava deste ponto de apoio para apresentar, *entre os casos simples de fatoração algébrica*, a decomposição em fatores dos binômios $a^3 + b^3$ e $a^3 - b^3$. Com efeito, não me pareceu didático dizer apenas aos estudantes que

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

sem lhes ensinar, ao mesmo tempo, o meio mais simples e racional para verificar essas identidades.

Cabe aos meus colegas, professores de Matemática, dizerem se fiz bem ou mal; pondo neste livro alguma coisa mais do que o exigido pelo programa oficial; aguardo também com muito prazer os seus reparos honestos e bem intencionados sobre toda a matéria contida neste compêndio.

S. Paulo, março de 1943

Rua Safira, 9

O AUTOR

Prefácio da Terceira Edição

do

Terceiro Ano de Matemática

A PENAS um episódio. Antes de narrá-lo, porém, é necessário dizer que os meus alunos são obrigados a trabalhar, em classe, com dois compêndios de Matemática: o da série que estão cursando, e o da série anterior.

O caso deu-se em junho p. passado. Preparava-me eu para explicar aos meus alunos de uma terceira série que: *multiplicando ou dividindo o índice de um radical e o expoente do radicando, por um mesmo número, o valor do radical não se altera.*

Fui ao quadro-negro, escrevi

$$a^{\frac{2}{5}}$$

e perguntei à classe qual o significado desta expressão. Ninguém respondeu. Então pedi aos alunos que consultassem o **Segundo Ano de Matemática**. Cinco minutos depois, quasi todos os estudantes levantavam a mão, agitados, ansiosos e satisfeitos, prontos para interpretar a expressão acima mencionada.

E assim pude demonstrar o teorema referido e que, naturalmente, toda a classe compreendeu porque a sua única dificuldade está na interpretação do expoente fracionário.

E se não tivessem o compêndio? Teriam de recorrer aos *famosos cadernos de apontamentos*? Mas, onde encontrá-los? Impossível! De há muito teriam desaparecido no turbilhão das varreduras domésticas.

S. Paulo, março de 1936

O AUTOR

Rua Safira, 9

Abreviaturas usadas neste livro

E.M.P.V.....	Elementos de Matemática-Primeiro Volume	
E.M.S.V.....	Elementos de Matemática-Segundo Volume	
E.M.T.A.	Exercícios de Matemática-Terceiro Ano	
C.Q.D.	como queríamos demonstrar	
o.p.v.....	opostos pelo vértice	
t.p.m.	tem por medida	
alt.-int.....	alternos-internos	
alt.-ext.....	alternos-externos	
col.-int.....	colaterais-internos	
col.-ext.....	colaterais-externos	
H..... hipótese		T tese
O..... circunferência		⊙..... circunferências
⊥..... perpendicular		⊥..... perpendiculares
Δ..... triângulo		Δ..... triângulos
≠..... diferente de		∥..... paralela ou paralelas
□..... paralelogramo		▭..... paralelogramos
∠..... ângulo		∠..... ângulos
hip..... hipótese	 donde, portanto, então, etc..
compls.. complementares		supls.. suplementares
ÂBC... ângulo ABC		∠1 ângulo 1
Â..... ângulo A		~ .. semelhante ou semelhantes
tang.... tangente		sec... secante

Índice-Sumário

ÁLGEBRA

CAP. I — Números Relativos

§ §	Págs.
1. Somar números naturais é contar.....	1
2. Somar e subtrair com o auxílio de objetos quaisquer.....	1
3. Um gráfico para somar e subtrair.....	2
4. E' possível subtrair 18 de 13?.....	3
5. Extensão do campo numérico.....	3
6. Números positivos e negativos.....	4
7. Os números negativos e os débitos.....	5
8. Os números negativos e as temperaturas.....	5
9. Os números negativos e os lucros e prejuízos.....	5
10. Valor absoluto de um número qualificado; módulo..	6
11. O sinal + (<i>mais</i>) e o sinal — (<i>menos</i>).....	7
12. Adição de números relativos.....	8
13. Valor da soma em relação às parcelas.....	9
14. Subtração de números relativos.....	10
15. A soma de dois números simétricos é zero.....	13
16. Simplificação da expressão — (+10) ou — (—10)..	14
17. Expressões.....	14
18. Multiplicação de números relativos.....	15
19. Divisão de números relativos.....	16
20. Números fracionários relativos.....	17

CAP. II — Expressões Algébricas

21. Os símbolos algébricos.....	19
22. Expressão algébrica.....	20
23. Termos semelhantes.....	22
24. Ordenar um polinômio.....	24
25. Classificação das expressões algébricas.....	24

CAP. III — Operações Algébricas

26.	Adição algébrica.....	27
27.	Subtração algébrica.....	29
28.	Potência de um número.....	30
29.	Multiplicação de monômios.....	31
30.	Multiplicação de um polinômio por um monômio....	32
31.	Multiplicação de dois polinômios.....	34
32.	Fórmulas de multiplicação algébrica; identidades....	37
33.	Quadrado e raiz quadrada de um monômio.....	42
34.	Cubo e raiz cúbica de um monômio.....	43
35.	Quarta potência e raiz quarta de um monômio.....	44
36.	Potências e raízes dos monômios.....	45
37.	Divisão de monômios.....	45
38.	O expoente zero.....	46
39.	O expoente negativo.....	47
40.	O expoente fracionário.....	48
41.	As frações algébricas.....	49
42.	O sinal nas frações algébricas.....	51
43.	Grau de uma expressão algébrica.....	52
44.	Divisão algébrica.....	54
45.	Divisão de um polinômio por um monômio.....	55
46.	Divisão de um polinômio por um polinômio.....	56
47.	Divisão com resto.....	63
48.	Divisibilidade por $x - a$	65
49.	Divisibilidade por $x + a$	68
50.	Casos notáveis de divisão algébrica.....	69
51.	A divisibilidade em Álgebra.....	72
52.	Fatoração de um monômio.....	73
53.	Fatoração de polinômios.....	74
	I. Caso do fator comum.....	74
	II. Fatoração por agrupamento.....	75
	III. Caso do trinômio quadrado perfeito.....	76
	IV. Caso da diferença de dois quadrados.....	78
	V. Caso do trinômio do segundo grau.....	79
	VI. Caso da soma ou diferença de dois cubos.....	82
	VII. Caso do trinômio $a^4 + a^2b^2 + b^4$	83
	VIII. Caso da soma ou diferença de duas potências com expoentes iguais e bases diferentes.....	83
54.	Máximo divisor comum.....	85
55.	M.D.C. pelo processo das divisões sucessivas.....	87
56.	Mínimo múltiplo comum.....	90

CAP. IV — Frações Algébricas

57.	Definição.....	92
58.	Simplificação das frações algébricas.....	93
59.	Redução de frações algébricas ao mesmo denominador	94
60.	Adição e subtração de frações algébricas.....	95
61.	Multiplicação e divisão de frações algébricas.....	96

CAP. V — Equações do Primeiro Grau

62.	Definições.....	99
63.	Incógnitas e raízes.....	100
64.	Equações equivalentes.....	101
65.	Princípios de equivalência.....	101
66.	Restrições ao segundo princípio.....	103
67.	Resolução de uma equação.....	106
68.	Equações com denominadores numéricos.....	109
69.	Equações literais.....	113
70.	Resolução algébrica de um problema.....	114
71.	Forma normal da equação do primeiro grau com uma incógnita.....	117
72.	Discussão da fórmula $x = \frac{b}{a}$	117
73.	Indeterminações aparentes.....	120
74.	Classificação das equações.....	123 ^{ad}
75.	Equações de grau superior ao primeiro.....	127

CAP. VI — Geometria Dedutiva

76.	Proposições geométricas.....	129
77.	O método dedutivo.....	131
78.	Métodos de demonstração.....	132
79.	O ponto, a reta e o plano.....	135
80.	Figuras geométricas.....	136
81.	Divisão da Geometria.....	137

CAP. VII — A Reta

82.	Ângulos.....	138
83.	Ângulos adjacentes.....	140
84.	A medida dos ângulos.....	142
85.	Soma dos ângulos.....	144
86.	Ângulos complementares e suplementares.....	143
87.	Bissetriz de um ângulo; \angle o. p. v.....	147

88.	rotações de semiplanos.....	150
89.	Perpendiculares e oblíquas.....	151
90.	A mediatriz.....	156
91.	A mediatriz é um lugar geométrico.....	157
92.	Polígonos.....	159
93.	Triângulos.....	160
94.	O triângulo isósceles.....	162
95.	Grandeza relativa dos lados de um triângulo.....	164
96.	Linhas envoltivas e envolvidas.....	164
97.	Igualdade de triângulos quaisquer.....	165
98.	Igualdade de triângulos retângulos.....	169
99.	A bissetriz e suas propriedades.....	170
100.	A bissetriz é um lugar geométrico.....	172
101.	Definição de paralelas.....	172
102.	Teoremas relativos às paralelas.....	173
103.	Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal.....	175
104.	O verdadeiro postulado de Euclides.....	178
105.	Porções de paralelas entre paralelas.....	178
106.	Mais um lugar geométrico.....	179
107.	Ângulos cujos lados são paralelos.....	180
108.	Ângulos cujos lados são perpendiculares.....	181
109.	Soma dos ângulos de um triângulo.....	182
110.	Os quadriláteros.....	184
111.	Soma dos ângulos de um quadrilátero.....	185
112.	O paralelogramo.....	185
113.	As diagonais do paralelogramo.....	188
114.	Simetria em relação a um ponto.....	190
115.	Igualdade e simetria.....	192
116.	Simetria em relação a uma reta.....	192
117.	O retângulo.....	194
118.	O losango.....	196
119.	O quadrado.....	198
120.	O trapézio.....	199
121.	As mediatrizes de um triângulo.....	200
122.	As alturas de um triângulo.....	201
123.	As bissetrizes de um triângulo.....	202
124.	O segmento retilíneo que liga os meios de dois lados de um triângulo.....	203
125.	As medianas de um triângulo.....	205
126.	A mediana de um trapézio.....	206
127.	Ângulos e diagonais de um polígono.....	208
128.	As diagonais de um polígono.....	209
129.	A soma dos ângulos de um polígono.....	210
130.	O ângulo de um polígono regular.....	211
131.	A soma dos ângulos externos de um polígono.....	211
132.	A soma dos ângulos de polígonos.....	212

CAP. VIII — O Círculo

133.	A circunferência é um lugar geométrico.....	214
134.	A divisão da circunferência.....	216
135.	A secante e a tangente.....	217
136.	Arcos e cordas.....	218
137.	A distância de uma corda ao centro.....	222
138.	Traçar uma circunferência que passe por três pontos dados.....	223
139.	As propriedades da tangente.....	224
140.	Cordas paralelas.....	225
141.	Distância de um ponto a uma circunferência.....	226
142.	Circunferências secantes e tangentes.....	228
143.	Posições mútuas de duas circunferências.....	230
144.	Medida comum de duas grandezas da mesma espécie.....	231
145.	Razão de duas grandezas da mesma espécie.....	233
146.	Grandezas comensuráveis e incommensuráveis.....	234
147.	O ângulo central.....	235
148.	O ângulo inscrito.....	239
149.	Segmento circular.....	240
150.	Ângulo formado por uma tangente e uma corda.....	241
151.	Ângulos formados por secantes e tangentes.....	242
152.	Segmento capaz.....	243
153.	O quadrilátero inscrito.....	245

CAP. IX — Construções Geométricas

154.	Definições e métodos.....	247
155.	Traçado do hexágono regular inscrito.....	247
156.	Traçado de perpendiculares.....	248
157.	Construção de ângulos.....	250
158.	Construção do segmento capaz de um ângulo dado.....	252
159.	Construção de triângulos.....	253
160.	Traçado de paralelas.....	254
161.	Construção de quadriláteros.....	254
162.	Traçado de tangentes.....	255
163.	Igualdade de figuras planas.....	257

ÁLGEBRA

CAPÍTULO I

Números Relativos

1. Somar números naturais é contar. Quem soma números naturais, conta. Para somar 8 com 5 diremos: $8+1=9$, $9+1=10$, $10+1=11$, $11+1=12$, $12+1=13$. Portanto, $8+5=13$. E não há outro modo de somar 8 com 5. Quem quiser evitar este trabalho, deve decorar a soma dos números 8 e 5. Entretanto, pode-se abreviar o processo indicado, recorrendo aos dedos; pegando sucessivamente em cada um dos dedos de uma das mãos, diremos: *nove, dez, onze, doze e treze*. Portanto, $8+5=13$.

Subtrair números naturais é contar. Quem subtrai números naturais, conta. Para subtrair 5 de 13, diremos $13-1=12$, $12-1=11$, $11-1=10$, $10-1=9$, $9-1=8$. Portanto, $13-5=8$. E não há outro modo de subtrair 5 de 13. Quem quiser evitar este trabalho, deve decorar a diferença entre 13 e 8. Entretanto, pode-se abreviar o processo indicado, recorrendo aos dedos; pegando sucessivamente em cada um dos dedos de uma das mãos, diremos: *doze, onze, dez, nove e oito*. Portanto, $13-5=8$.

Do exposto resultam as duas conclusões seguintes:

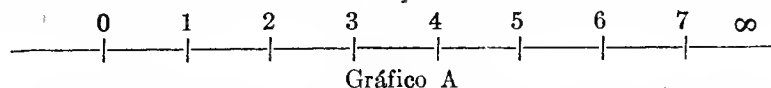
- a) *somar é contar para diante.*
- b) *subtrair é contar para trás.*

2. Somar e subtrair com o auxílio de objetos quaisquer. Quem não sabe de cor as tábuas da adição e da subtração pode, portanto, somar e subtrair com o auxílio dos dedos. Mas, nós temos dez dedos de modo que, recorrendo a eles, não podemos efetuar operações como estas: $-17+15$, $23+18$, $34-19$, $27-13$, etc.. E então?

Então é necessário recorrer a outros objetos: palitos, pedras, tábuas, árvores, doces, livros, etc.. Ora, é manifesta a dificuldade de somar e subtrair com o auxílio de objetos quaisquer.

Entretanto, os estudantes que ainda não decoraram as tábuas da adição e da subtração, não devem desanimar. Nós vamos oferecer-lhes um gráfico simples e fácil de manejar.

3. Um gráfico para somar e subtrair. Em uma folha de papel traçamos uma reta. (gráfico A) (*). Nesta reta escolhemos um ponto qualquer 0 (zero). A partir do ponto zero, e para a direita, (poderia ser para a esquerda) tomamos um segmento cujo comprimento pode ser qualquer, por exemplo, um centímetro; em



continuação a este segmento tomamos um segundo segmento que deverá ser igual ao primeiro; em continuação ao segundo segmento, um terceiro segmento que deverá ser igual ao primeiro, e assim sucessivamente. E estará feito o nosso gráfico.

Neste gráfico, o número 3 está representado pelo segmento que começa no ponto zero e termina no ponto 3; o número 3 não é o ponto 3; é o segmento 0|3, isto é, a soma dos segmentos 0|1, 1|2, 2|3. Análogamente, o número 5 não é o ponto 5; é a soma dos segmentos 0|1, 1|2, 2|3, 3|4, 4|5; é o segmento 0|5. (Quando dizemos, por exemplo, segmento 0|4, estamos nos referindo ao segmento cuja origem é 0 (zero) e cuja extremidade é 4.) O gráfico A é a representação gráfica dos números inteiros, cuja sucessão se estende até o infinito, como se costuma dizer; o infinito é representado pelo símbolo ∞ .

Com este gráfico podemos somar e subtrair. Por exemplo, $7+5=?$ Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 7, contamos 5 segmentos para a direita e encontramos o número 12, que é a soma pedida. Outro exemplo: $4+11=?$ Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 4, contamos 11 segmentos para a direita e encontramos 15, que é a soma pedida.

(*) Convém desenhar este gráfico no quadro-negro, prolongando a numeração dos segmentos até 28 ou 30 ou mais.

Quanto é $13-5$? Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 13, contamos 5 segmentos para a esquerda e encontramos 8, que é a diferença pedida. Quanto é $17-9$? Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 17, contamos 9 segmentos para a esquerda e encontramos 8, que é a diferença pedida.

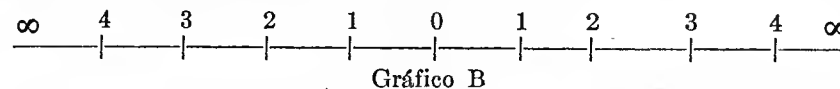
Portanto, no gráfico A fica estabelecido que:

a) somar é contar para a direita.

b) subtrair é contar para a esquerda.

4. É possível subtrair 18 de 13? No campo numérico do gráfico A, de 13 não podemos subtrair 18. A subtração é a operação que tem por fim, dados dois números, tirar do maior tantas unidades quantas são as do menor. Logo, a operação $13-18$ é impossível. Vamos ao gráfico A e tentemos subtrair 18 de 13. Procuramos o ponto 13 e contamos 18 segmentos para a esquerda... mas, não é possível, porque à esquerda do ponto 13 há somente 13 segmentos e não 18.

5. Extensão do campo numérico. Voltemos ao gráfico A. A partir do ponto 0 (zero) e para a esquerda, marquemos mais uma porção de segmentos iguais aos que foram marcados para a direita. Teremos assim o gráfico B (*).



E, agora, quanto é $13-18$? Vamos ao gráfico B, procuremos o ponto 13, contemos 18 segmentos para a esquerda e encontraremos o número 5. Portanto, $13-18=5$...

Ora!!!, dirão quasi todos os alunos que estão na classe, ouvindo atentamente o professor. O pasmo é geral. E os alunos que não proferiram aquela exclamação de espanto, olham para o professor, atônitos, assim com uns ares de quem diz: O professor está brincando?!

E este espanto é justificado porque, no gráfico A ou B, o número 5 é representado pelos cinco primeiros segmentos situados à direita do ponto zero e não à esquerda. E esse número é a diferença entre 13 e 8, como já aprendemos (§3).

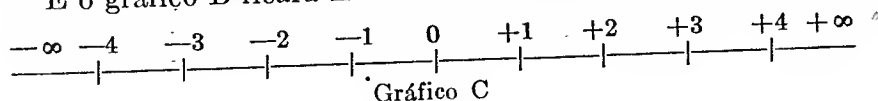
(*) Reproduzir este gráfico no quadro-negro, estendendo a numeração nos dois sentidos, mais ou menos até 20.

Mas o professor insiste dizendo que $13 - 18 = 5$ e que o resto ao qual êle se refere, não é o segmento 0|5, à direita do ponto zero, mas o segmento 0|5 à esquerda do ponto zero. Mas, como distinguir estes dois cinco?

6. Números positivos e negativos. Para distinguir os dois cinco do gráfico B, estabelecemos a seguinte convenção: todos os números situados à direita do ponto 0 (zero) serão chamados **positivos** e serão precedidos pelo sinal + (mais); todos os números situados à esquerda do ponto 0 (zero) serão chamados **negativos** e serão precedidos pelo sinal - (menos).

Chamam-se **números qualificados** ou **números relativos**, aos números associados com o sinal + (mais) ou com o sinal - (menos).

E o gráfico B ficará modificado como se vê no gráfico C (*).



Os números positivos são velhos conhecidos nossos; são os números com os quais travámos conhecimento aos sete anos de idade, quando entrámos para a escola primária. Com êles trabalhámos durante os quatro anos do curso preliminar, aprendendo as operações que com êles se efetuam e as suas propriedades. Entretanto, não dizíamos então **números positivos**; dizíamos apenas **números naturais**, por não termos necessidade de distinguí-los dos **negativos**, que criámos com o gráfico C.

Estabelecendo a convenção dos sinais indicada, concluímos:

$$13 - 18 = -5$$

Surgem assim os números negativos: *menos um, menos dois, menos três, menos quatro, menos cinco*, etc., e os números naturais, os nossos velhos conhecidos da escola primária, para não se confundirem com êsses recém-chegados chamados **números negativos**, tomam o nome de **números positivos** e são enunciados: *mais um, mais dois, mais três, mais quatro*, etc..

(*) Desenvolver êste gráfico no quadro negro, como os anteriores.

Portanto, é necessário não esquecer que os **números positivos** são os **números naturais**. (*)

7. Os números negativos e os débitos. Os números negativos existem? Existem, sim, sendo conhecidos com outros nomes. Vejamos.

Vera, passando pela Casa Sloper, viu uma flor cujo preço era 23 cruzeiros. Entrou na loja, abriu a sua bolsa, entregou ao empregado os 18 cruzeiros que a sua bolsa continha e retirou-se muito satisfeita com a linda flor que comprara. Como? Ora, dirá uma das colegas, Vera ficou devendo 5 cruzeiros, isto é, Vera *contraiu um débito*. Suponhamos que a bolsa de Vera contém 30 cruzeiros e a flor custa 23 cruzeiros; 30 cruzeiros - 23 cruzeiros = 7 cruzeiros. E Vera ainda tem 7 cruzeiros. Se a bolsa de Vera contém 18 cruzeiros, então 18 cruzeiros - 23 cruzeiros = -5 cruzeiros. E diremos que Vera ainda tem -5 cruzeiros (menos 5 cruzeiros). Quem tem a receber 15 cruzeiros tem +15 cruzeiros (mais 15 cruzeiros); quem tem a pagar 12 cruzeiros tem -12 cruzeiros (menos 12 cruzeiros). Portanto, os **débitos** são **números negativos**, se os **créditos** forem considerados **números positivos**.

8. Os números negativos e as temperaturas. O termômetro estava marcando 12 graus, mas chegou do Sul uma onda de frio e a temperatura baixou extraordinariamente. O Dr. Oscar chama seu filho Carlos e pede-lhe que veja a temperatura do dia. E Carlos, que já conhece alguma coisa sobre números relativos, responde: -5 graus (*menos 5 graus*). E, vendo seu pai admirado com esta resposta estranha, Carlos explica: *Pois é, papai, ontem o termômetro estava marcando 12 graus. Mas, devido à onda fria, a temperatura baixou 17 graus. Ora, 12 - 17 = -5. Portanto, o termômetro está marcando -5 graus (menos 5 graus) ou, como se diz vulgarmente, 5 graus abaixo de zero.* Portanto, as temperaturas abaixo de zero são **números negativos**, se as temperaturas acima de zero forem consideradas **números positivos**.

9. Os números negativos e os lucros e os prejuízos. No fim de cada ano, as casas comerciais costumam dar um balanço para verificar se houve lucro ou prejuízo. O guarda-livros

(*) Convém lembrar que, nas considerações que vimos desenvolvendo desde o início dêste capítulo, estamos nos referindo somente aos números naturais.

da casa verifica cuidadosamente qual foi a *receita* (dinheiro que entrou), e qual a *despesa* (dinheiro que saiu).

Se a receita é de 40 000 cruzeiros e a despesa é de 32 000 cruzeiros, há lucro: $40\ 000 \text{ cruzeiros} - 32\ 000 \text{ cruzeiros} = 8\ 000 \text{ cruzeiros}$. Se a receita é de 35 000 cruzeiros e a despesa é de 35 000 cruzeiros, não há lucro: $35\ 000 \text{ cruzeiros} - 35\ 000 \text{ cruzeiros} = 0$. Se a receita é de 32 000 cruzeiros e a despesa é de 40 000 cruzeiros, há prejuízo: $40\ 000 \text{ cruzeiros} - 32\ 000 \text{ cruzeiros} = 8\ 000 \text{ cruzeiros}$.

E diremos que, nestes três casos, os lucros foram +8 000 cruzeiros, 0 cruzeiros, -8 000 cruzeiros.

No primeiro caso, o lucro é positivo; no segundo, é nulo; no terceiro, é negativo. Portanto, os *prejuízos de uma casa comercial são também exemplos de números negativos, se os lucros forem considerados números positivos*.

10. Valor absoluto de um número qualificado; módulo.
Valor absoluto de um número qualificado é o valor que ele tem quando se suprime o seu sinal; é o seu valor aritmético. Por exemplo, o valor absoluto de +10 ou -10 é 10; de +5 ou -5 é 5.

O valor absoluto de um número relativo é também chamado *módulo* deste mesmo número. Para indicar o módulo de um número relativo, coloca-se o mesmo entre dois pequenos traços verticais. Assim:

O valor absoluto ou módulo de +5 é $|+5|$.
, , , , , -5 é $|-5|$.

Convém observar que os números negativos constituem uma *continuação* dos números positivos, *abaixo do número zero*. Consideremos a sucessão de números inteiros que se estende indefinidamente: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ∞ . Tomemos agora um número qualquer, por exemplo, 12; vamos subtrair deste número uma unidade, depois outra, depois outra, etc.. Teremos: 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. E não é possível continuar. Mas será possível se considerarmos a sucessão dos números relativos: 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, $-\infty$.

Destas observações resultam verdades importantes.

I. Os números positivos e negativos constituem uma *única* sucessão de números que se estende, que se desenvolve indefinidamente em dois sentidos opostos.

II. O número que divide esta sucessão em duas sucessões, a dos números positivos e a dos negativos, é o número zero. Zero é um número que indica falta de unidades; o indivíduo que tem 20 cruzeiros a pagar e 20 cruzeiros a receber, liquida suas contas e fica com *zero cruzeiros*; o negociante que gastou 50 000 cruzeiros em mercadorias e recebeu 50 000 cruzeiros pelas mesmas, ganhou *zero cruzeiros*.

III. Assim como 6 é maior que 5, 5 maior que 4, etc., do mesmo modo 0 (zero) é maior que -1, -1 é maior que -2, -2 é maior que -3, etc.. Enfim, zero é maior do que qualquer número negativo e, de dois números negativos, o maior é aquele cujo valor absoluto ou módulo é menor. Por exemplo, -3 é maior que -5, que por sua vez é maior que -7, etc..

IV. No gráfico C examinemos os números +8 e -8 (mais 8 e menos 8). Ambos estão representados pelo mesmo número de segmentos, isto é, por oito segmentos, e esses segmentos são iguais. Portanto, em valor absoluto, esses dois números são iguais. Entretanto, o número +8 começa no ponto 0 (zero) e se estende para a direita, ao passo que o número -8 começa no ponto 0 e se estende para a esquerda. As extremidades dos números +8 e -8 estão situadas sobre a mesma reta XY e distam igualmente do ponto 0. Por este motivo, dá-se aos números +8 e -8 o nome de *números simétricos* (*). Portanto, dois números simétricos são dois números iguais em valor absoluto, mas com sinais contrários. Exemplos: +8 e -8, +11 e -11, etc..

Os números relativos dividem-se em três classes: a dos números positivos, a dos números negativos, e uma terceira classe que só compreende um número, o número **neutro ou zero**. (**)

Os números +0 e -0 são chamados *números nulos*.

11. O sinal + (mais) e o sinal - (menos). Estes dois sinais indicam, respectivamente, a adição e a subtração, isto é,

(*) Dois pontos são simétricos em relação a um ponto dado, quando o ponto dado é o meio do segmento que liga os dois primeiros. (§114)

(**) J. I. Almeida Lisboa, *Lições de Álgebra Elementar, Primeiro Volume*, pág. 22.

as duas primeiras operações que se realizam sobre os números. E, além desta função, eles desempenham mais uma, importantíssima: é a função de qualificar os números, isto é, indicar se eles, no gráfico C, devem ser contados de zero para a direita ou de zero para a esquerda; *indicar se eles são positivos ou negativos*.

12. Adição de números relativos. Para maior clareza, e até que os estudantes adquiram a prática dos números relativos, escreveremos entre parênteses os números dados com seus sinais. Seja a expressão

$$(+5) + (-7) + (+10) - (-5) + (-20) - (+20)$$

O sinal que está situado dentro dos parênteses, à esquerda de cada número, está qualificando este mesmo número; o sinal *mais* e o sinal *menos* que estão ligando as expressões $(+5)$, (-7) , $(+10)$, (-5) , etc., estão indicando as operações que queremos realizar sobre esses números.

1.º exemplo: $(+8) + (+7)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número $+8$, contemos 7 segmentos *para a direita* e acharemos $+15$. Portanto, $(+8) + (+7) = +15$.

Justifiquemos este resultado. Somar números positivos ou somar números naturais é a mesma coisa. (§ 8) Logo, $(+8) + (+7) = 8 + 7 = 15 = +15$.

2.º exemplo: $(-7) + (+12)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número -7 , contemos 12 segmentos *para a direita* e acharemos $+5$. Portanto, $(-7) + (+12) = +5$.

Justifiquemos este resultado. É bastante lembrar que, somar um número positivo, isto é, um número natural, é contar para a direita, no gráfico A. (§ 3)

3.º exemplo: $(-17) + (+13)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número -17 , contemos 13 segmentos *para a direita* e acharemos -4 . Portanto, $(-17) + (+13) = -4$.

Este resultado é fácil de justificar, recorrendo aos dois processos indicados no 2.º exemplo.

4.º exemplo: $(+15) + (-8)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número $+15$, contemos 8 segmentos *para a esquerda* e acharemos $+7$. Portanto, $(+15) + (-8) = +7$.

Justifiquemos este resultado. Em primeiro lugar, a ordem das parcelas não influe no valor da soma. Logo, $(+15) + (-8) = (-8) + (+15)$. E, de acordo com o 2.º exemplo, $(-8) + (+15) = +7$. Portanto, $(+15) + (-8) = +7$.

5.º exemplo: $(+3) + (-10)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número $+3$, contemos 10 segmentos *para a esquerda* e acharemos -7 . Portanto, $(+3) + (-10) = -7$. Este resultado é fácil de justificar, recorrendo aos dois processos indicados no 4.º exemplo.

6.º exemplo: $(-4) + (-8)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número -4 , contemos 8 segmentos *para a esquerda* e acharemos -12 . Portanto, $(-4) + (-8) = -12$.

Para justificar este resultado, diremos que -4 e -8 são, respectivamente, dois débitos e, naturalmente, se Décio deve 4 cruzeiros a Celso e 8 cruzeiros a Fernando, deve 12 cruzeiros aos dois.

Podemos, pois, estabelecer as seguintes regras:

I. Para somar dois números relativos com o mesmo sinal, somam-se os seus valores absolutos ou módulos e dá-se à soma o sinal que os dois números têm. (1.º e 6.º exemplos)

II. Para somar dois números relativos com sinais contrários, calcula-se a diferença entre os valores absolutos ou módulos dos dois números dados, e dá-se ao resultado o sinal do número que tem maior valor absoluto. (2.º, 3.º, 4.º e 5.º exemplos)

13. Valor da soma em relação às parcelas. Quando se consideram os números naturais a soma é sempre maior do que qualquer uma das parcelas. Já não acontece o mesmo, quando se consideram os números relativos; no 2.º exemplo do parágrafo anterior, a soma $+5$ é maior do que a parcela -7 , porém não é maior do que a parcela $+12$.

Exercício. Calcular a soma seguinte:

$$(+8) + (-7) + (+15) + (-13) + (-20) + (2) + (+16) + (-9)$$

Em primeiro lugar somamos todos os números positivos, depois os negativos e finalmente as duas somas. Teremos:

$$\begin{aligned}
 (+8) + (+15) + (+2) + (+16) &= +41 \\
 (-7) + (-13) + (-20) + (-9) &= -49 \\
 (+41) + (-49) &= -8
 \end{aligned}$$

Exercícios. Série I

1. $(+234) + (+547) = +781$
2. $(+512) + (-864) = -352$
3. $(-841) + (+637) = -204$
4. $(+37) + (+58) + (+93) = +188$
5. $(+748) + (-329) = +419$
6. $(-732) + (+987) = +255$
7. $(-549) + (-785) = -1334$
8. $(-15) + (-87) + (-72) = -174$
9. $(+43) + (-87) + (+28) + (+53) + (-387) + (-128) + (+415) = -163$
10. $(-34) + (-38) + (-42) + (-59) + (+85) + (+137) + (-203) = -154$
11. $(+17) + (-18) + (+543) + (-376) + (-641) + (+84) + (-15) = -418$
12. $(-37) + (-48) + (-57) + (-74) + (+123) + (+235) + (+436) = +775$
13. $(-213) + (+315) + (+518) + (-722) + (-88) + (-75) + (+429) = +264$
14. $(+257) + (-813) + (+569) + (-137) + (-146) + (-158) + (-174) = -512$
15. $(+483) + (-75) + (-84) + (-97) + (-103) + (-125) + (-150) = +159$

14. **Subtração de números relativos.** 1.º exemplo: $(+15) - (+8)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número +15, contemos 8 segmentos *para a esquerda* e acharemos +7. Portanto, $(+15) - (+8) = +7$.

Para justificar êste resultado basta lembrar que os números positivos são os números naturais. (§8) Logo, $(+15) - (+8) = 15 - 8 = 7 = +7$.

2.º exemplo: $(-4) - (+15)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do número -4, contemos 15 segmentos *para a esquerda* e acharemos -19. Portanto, $(-4) - (+15) = -19$.

Para justificar êste resultado poderíamos dizer que, de acordo com o 1.º exemplo, subtrair um número positivo é contar para a esquerda. Mas é um resultado que causa estranheza aos estudantes; vamos justificá-lo de um modo muito simples.

Antônio é um menino que tem débitos e créditos. A sua situação financeira é a seguinte:

Débitos	Créditos
Pedro... 3 cruzeiros (- 3)	Artur... 5 cruzeiros (+ 5)
João.... 4 cruzeiros (- 4)	Raul.... 6 cruzeiros (+ 6)
Luiz.... 11 cruzeiros (- 11)	José.... 15 cruzeiros (+ 15)
Carlos.. 8 cruzeiros (- 8)	Flávio.. 2 cruzeiros (+ 2)
Décio... 16 cruzeiros (- 16)	Omar.... 10 cruzeiros (+ 10)
42 cruzeiros (- 42)	38 cruzeiros (+ 38)

Portanto, se Antônio proceder à liquidação de suas contas, ainda ficará devendo 4 cruzeiros. Acontece, porém, que, no dia em que Antônio resolve liquidar suas contas, morre José, sem deixar herdeiros, nem dinheiro. Logo, é necessário suprimir, eliminar, tirar, subtrair, da coluna dos créditos, a quantia de 15 cruzeiros. E Antônio, privado dos 15 cruzeiros que José lhe devia, fica devendo 19 cruzeiros em lugar de 4 cruzeiros. Da sua fortuna líquida de -4 cruzeiros (-4) foi preciso tirar, subtrair um crédito de 15 cruzeiros (+15) e então Antônio ficou devendo 19 cruzeiros (-19). E eis por que $(-4) - (+15) = -19$.

3.º exemplo: $(+3) - (-5)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do segmento +3, contemos 5 segmentos *para a direita* e acharemos +8. Portanto, $(+3) - (-5) = +8$.

Se o resultado obtido no 2.º exemplo causa estranheza aos estudantes, êste deixa-os boquiabertos. Como? Pois o minuendo sendo 3, o resto pode ser 8?! Vamos então justificar êste resultado, como fizemos em relação ao 2.º exemplo. A situação financeira de Luiz é a seguinte:

Débitos	Créditos
Fábio... 7 cruzeiros (- 7)	Artur... 5 cruzeiros (+ 5)
Raul.... 10 cruzeiros (- 10)	José.... 8 cruzeiros (+ 8)
Sílvia... 9 cruzeiros (- 9)	Pedro... 9 cruzeiros (+ 9)
Décio... 5 cruzeiros (- 5)	Carlos.. 12 cruzeiros (+ 12)
31 cruzeiros (- 31)	34 cruzeiros (+ 34)

Portanto, se Luiz proceder à liquidação de suas contas, ainda ficará com 3 cruzeiros. Acontece, porém, que Décio resolve perdoar a Luiz os 5 cruzeiros que lhe são devidos. Logo, é necessário suprimir, eliminar da coluna dos débitos, a quantia de 5 cruzeiros. E é claro que Luiz, ficando livre de seu débito para com Décio, ficará com 8 cruzeiros em lugar de 3 cruzeiros. Da sua fortuna líquida de 3 cruzeiros foi preciso subtrair um débito de 5 cruzeiros (-5) , e Luiz ficou com 8 cruzeiros $(+8)$. E eis por que $(+3) - (-5) = +8$.

4.º exemplo: $(-7) - (-15)$. Vamos ao gráfico C, procuremos a extremidade do segmento -7 , contemos 15 segmentos para a direita e acharemos $+8$. Portanto, $(-7) - (-15) = +8$.

5.º exemplo: $(-20) - (-13)$. Com o auxílio do gráfico C, e procedendo como ficou indicado em relação ao 3.º e 4.º exemplos, acharemos -7 . Portanto, $(-20) - (-13) = -7$.

Em resumo:

$$\begin{array}{lcl} (+15) - (+8) = +7 & | & (-7) - (-15) = +8 \\ (-4) - (+15) = -19 & | & (-20) - (-13) = -7 \\ (+3) - (-5) = +8 & | & \end{array}$$

Em primeiro lugar observe-se que, no gráfico C, e como foi mostrado na justificação do resultado de cada exemplo,

- Subtrair um número positivo é contar para a esquerda.
- Subtrair um número negativo é contar para a direita.

Comparando estas conclusões com as conclusões a que chegámos no fim do parágrafo 12, resultam as duas novas conclusões seguintes:

- Subtrair um número positivo é o mesmo que somar um número negativo.
- Subtrair um número negativo é o mesmo que somar um número positivo.

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

Regra. Para subtrair de um número relativo, outro número também relativo, é bastante trocar o sinal do segundo e somá-lo ao primeiro.

$$\begin{array}{l} \text{Exemplos} \left\{ \begin{array}{l} (+15) - (+8) = (+15) + (-8) = +7 \\ (-4) - (+15) = (-4) + (-15) = -19 \\ (+3) - (-5) = (+3) + (+5) = +8 \\ (-7) - (-15) = (-7) + (+15) = +8 \\ (-20) - (-13) = (-20) + (+13) = -7 \end{array} \right. \end{array}$$

Exercício. Calcular a seguinte expressão:

$$(+8) - (+7) + (-9) - (-10) + (-5) + (-8) - (-25)$$

Já aprendemos que, para subtrair um número relativo, é bastante trocar-lhe o sinal, e depois somá-lo em lugar de subtraí-lo. Tomamos então a expressão dada e substituímos o sinal que indica subtração pelo sinal que indica adição, tendo, porém, o cuidado de trocar o sinal dos números relativos que devem ser subtraídos. Teremos:

$$(+8) - (+7) + (-9) - (-10) + (-5) + (-8) - (-25) =$$

$$(+8) + (-7) + (-9) + (+10) + (-5) + (-8) + (+25)$$

E, de acordo com o exercício do parágrafo 15,

$$(+8) + (+10) + (+25) = (+43)$$

$$(-7) + (-9) + (-5) + (-8) = (-29)$$

$$(+43) + (-29) = (+14)$$

Portanto, o valor da expressão dada é $(+14)$.

Exercícios. Série II

- $(+37) - (-15) + (-84) + (+28) - (-19) + (+17) =$
- $(-37) - (-42) + (-85) + (+43) - (+77) - (-88) + (+55) =$
- $(+54) + (-87) - (-86) - (+85) + (-82) - (-75) =$
- $(-123) + (-458) - (-736) + (+528) - (-898) + (-1345) =$
- $(+67) + (-84) - (+519) + (-817) - (-731) - (-774) =$

15. A soma de dois números simétricos é zero. Consideremos no gráfico C, os números $+7$ e -7 . São dois números simétricos. (§10) A soma de dois números simétricos é zero. Com efeito, $(+7) + (-7) = 0$; $(+13) + (-13) = 0$; etc.. (§12) Dizemos que a soma de dois números relativos iguais em valor absoluto, sendo um positivo e outro negativo, é nula. Calculemos, por exemplo, a expressão seguinte:

$$(+5) - (+8) + (-10) + (-5) + (+11) + (-8) + (+10)$$

Em primeiro lugar é necessário transformar as subtrações em adições. Assim procedendo, teremos:

$$(+5) + (-8) + (-10) + (-5) + (+11) + (-8) + (+10)$$

Nesta expressão, o 1.º e o 4.º números são simétricos; logo, $(+5) + (-5) = 0$. O 3.º e o 7.º números são também simétricos; logo, $(-10) + (+10) = 0$. Suprimindo estes quatro números da expressão dada, resulta:

$$(-8) + (+11) + (-8) = (-5)$$

Exercícios. Série III

Para calcular as expressões que se seguem, o primeiro passo é transformar as subtrações em adições. Em seguida, suprimem-se os números simétricos. Depois procede-se como ficou indicado no § 13.

1. $(+8) + (-15) + (-7) - (-8) + (+20) + (-8) =$
2. $(-37) - (-48) + (-59) + (+37) - (-54) =$
3. $(-36) + (-79) - (-79) + (+79) - (-84) =$
4. $(+615) + (-397) - (-858) + (-736) + (-615) =$
5. $(+43) + (-43) - (-75) - (+75) + (+512) =$

16. Simplificação da expressão $-(+10)$ ou $-(-10)$. O que significa $-(+10)$? Significa, simplesmente, que o número $+10$ deve ser diminuído de um outro número qualquer. Por tanto, $-(+10) = +(-10) = (-10)$. (§ 14)

Do mesmo modo, $-(-10) = +(+10) = (+10)$

17. Expressões. Já vimos em que consiste uma expressão. Por exemplo, $7+8 \times 5 - 3 \times 4 + 18 \div 2$ é uma expressão; $(+8) - (+7) + (-5) - (-9)$ é também uma expressão. A primeira diferença notável entre as duas espécies de expressões é que a primeira é constituída exclusivamente por números inteiros, ao passo que a segunda é constituída por números relativos ou qualificados.

Consideremos a expressão seguinte:

$$(+7) + (-8) + (+12) + (-3) + (-5) + (+10) \quad (A)$$

Nesta expressão está indicada a adição de seis números relativos. Entretanto, esta expressão tem uma forma algum tanto complicada, devido ao grande número de parênteses que ela contém. Nós vamos dar-lhe uma forma mais simples, suprimindo todos os parênteses e o sinal mais, que está indicando a

adição dos seis números relativos que a constituem. Assim, a expressão (A) tomará a forma mais simples que se segue:

$$+7 - 8 + 12 - 3 - 5 + 10 \quad (B)$$

E, quando o primeiro número relativo da expressão dada for um número positivo, nós suprimiremos o sinal mais.

Daqui por diante não fecharemos mais dentro de parênteses, os números relativos que devem ser somados. Mas é necessário que os estudantes se lembrem sempre que:

- $7 - 8 + 9$ significa também $(+7) + (-8) + (+9)$
- $-7 - 3 - 6 + 8$ significa também $(-7) + (-3) + (-6) + (+8)$
- $5 + 7 + 8 + 9$ significa também $(+5) + (+7) + (+8) + (+9)$
- $-2 + 3 - 5 + 6$ significa também $(-2) + (+3) + (-5) + (+6)$

Exercícios. Série IV

1. Dada a expressão $(-7) + (-8) + (-10) + (+12) + (+15) + (-18)$, suprimir todos os parênteses e depois calcular o valor da expressão.
2. Idem, para a expressão $(+8) + (-5) + (+7) + (-10)$.
3. Idem, para a expressão $(-11) + (+8) + (-15) + (+20)$.
4. Idem, para a expressão $(+8) - (-7) + (-10) - (-15)$.
5. Idem, para a expressão $(-2) - (-3) - (-4) - (-5) - (-6)$.
6. Idem, para a expressão $-(+5) + (-8) - (-12) + (+15)$.
7. Dada a expressão $7 - 3 + 5 - 6 + 8 - 9$, colocar cada número relativo entre parênteses, sendo cada parênteses precedido pelo sinal mais.
8. Dada a expressão $8 - 7 - 5 + 6 + 9 + 11 - 13$, colocar cada número relativo entre parênteses, sendo cada parênteses precedido pelo sinal menos.

18. Multiplicação de números relativos. Já vimos que, na multiplicação de números inteiros, o multiplicador é um número abstrato que indica quantas vezes o multiplicando deve ser tomado como parcela. Nestas condições,

$$(+8) \times 3 = (+8) + (+8) + (+8) = (+24)$$

$$(-8) \times 3 = (-8) + (-8) + (-8) = (-24)$$

Consideremos agora as expressões $(+8) \times (-3)$ e $(-8) \times (-3)$. Desde que o multiplicador é um número abstrato, (-3) significa que os multiplicandos $(+8)$ e (-8) devem ser subtraídos três vezes. Logo:

$$(+8) \times (-3) = -(+8) - (+8) - (+8) = (-8) + (-8) + (-8) = (-24)$$

$$(-8) \times (-3) = -(-8) - (-8) - (-8) = (+8) + (+8) + (+8) = (+24)$$

$$(+8) \times (+3) = (+24)$$

$$(-8) \times (+3) = (-24)$$

$$(+8) \times (-3) = (-24)$$

$$(-8) \times (-3) = (+24)$$

Examinando os quatro resultados ao lado concluímos que:

Regra. O produto de dois números relativos, com o mesmo sinal, é um número positivo; o produto de dois

números relativos, com sinais contrários, é um número negativo.

19. Divisão de números relativos. A divisão é a operação que tem por fim, dados dois números, determinar um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro. Logo,

$$(+24) \div (+3) = (+8) \text{ porque } (+8) \times (+3) = (+24)$$

$$(-24) \div (+3) = (-8) \text{ porque } (-8) \times (+3) = (-24)$$

$$(+24) \div (-3) = (-8) \text{ porque } (-8) \times (-3) = (+24)$$

$$(-24) \div (-3) = (+8) \text{ porque } (+8) \times (-3) = (-24)$$

Regra. O quociente de dois números relativos, com o mesmo sinal, é um número positivo; o quociente de dois números relativos, com sinais contrários, é um número negativo.

Exercícios. Série V

$$1. (-8) \times (-5) \times (+12) \times (-1) \times (-20) = ?$$

Resp. (+9 600)

$$2. (+36) \times (-14) \times (-63) \times (+5) \times (-5) \times (-45) = ?$$

Resp. (+35 721 000)

$$3. (-3) \times (-5) \times (-2) \times (-7) \times (-1) \times (+15) = ?$$

Resp. (-3 150)

$$4. (-5) \times (+7) \times (-3) \times (+4) \times (-6) \times (+10) = ?$$

Resp. (-25 200)

$$5. (-2) \times (+3) \times (-4) \times (-5) \times (+1) \times (-10) = ?$$

Resp. (+1 200)

$$6. (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6 = ?$$

Resp. (+42)

$$7. (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + (-3)^5 = ?$$

Resp. (-183)

$$8. (-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5)^3 = ?$$

Resp. (-132)

$$9. (-6)^2 + (-5)^3 + (-4)^4 + (-3)^5 + (-2)^6 = ?$$

Resp. (-12)

$$10. (-10)^3 + (-10)^2 + (-10)^1 + (+10)^3 = ?$$

Resp. (+90)

$$11. (-1)^1 - (-1)^2 + (-1)^3 - (-1)^4 + (-1)^5 - (-1)^6 = ?$$

Resp. (-6)

$$12. (-2)^1 + (-2)^2 - (-2)^3 + (-2)^4 = ?$$

Resp. (+26)

$$13. (-3)^2 - (-3)^3 + (-3)^4 - (-3)^5 = ?$$

Resp. (+360)

$$14. (-2)^1 - (-2)^2 + (-2)^3 - (-2)^4 + (-2)^5 = ?$$

Resp. (-62)

$$15. (-2)^1 - (-2)^2 - (-2)^3 - (-2)^4 - (-2)^5 - (-2)^6 = ?$$

Resp. (-46)

$$16. (+10) + (-3)(+5) - (+2)(+7) - (-5)(+8) +$$

$$+(-3)(-1)(-5) = ?$$

Resp. (+6)

$$17. (-30) + (-1)(+6) - (-3)(-5) + (-8)(+3) +$$

$$+(+2)(-3)(-4) = ?$$

Resp. (-51)

$$18. (-3)^2 + (-4)(-5) - (-2)^6 + (-1)(-5)(+10) = ?$$

Resp. (+15)

$$19. (-1)(-2)(-3)(+4) - (-1)^4 - (-5)(-6)(+2)(+1)$$

$$- (-2)^5 = ?$$

Resp. (-53)

$$20. (-8)(+5) + (-3)^4 - (-3)^3 - (+5)(-1)(+3)(-2) = ?$$

Resp. (+38)

$$21. (-2)(-3)^2 + (-2)^4(+3) - (-5)^2(-1) + (-10)^2(+1) = ?$$

Resp. (+155)

$$22. (-10)^3 + (-3)^4(+2) + (-2)^5(-1) + (-2)^6(-3) = ?$$

Resp. (-998)

$$23. (-2)^2(-3)^3 - (-5)^2(-2)^4 - (-1)(-2)^3(-3)^3 + (-5)^4 = ?$$

Resp. (+333)

$$24. (-5)^2(-1) + (-2)^2(-3)^2(-4)^2 - (-1)^5(-2)^3(-3) = ?$$

Resp. (+575)

$$25. (-1)(-2)^2(-3)^2(-5) - (-5)^2(-4)(-3)^2(-2)^1 + 1000 = ?$$

Resp. (-620)

20. Números fracionários relativos. A necessidade de calcular a diferença entre dois números inteiros **a** e **b**, no caso

particular em que $a < b$, nos levou a uma segunda ampliação do campo numérico: a criação dos números negativos. (*)

Tudo o que dissemos neste capítulo, em relação aos números inteiros se aplica, sem restrições, aos números fracionários com os quais podemos operar tal qual como fizemos com os números inteiros. Assim é que:

$$\begin{array}{ll} 1. \left(+\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{7}{5}\right) & 5. \left(+\frac{10}{5}\right) + \left(-\frac{7}{5}\right) = \left(+\frac{3}{5}\right) \\ 2. \left(+\frac{11}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{7}{5}\right) & 6. \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right) \\ 3. \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{9}{5}\right) = \left(+\frac{7}{5}\right) & 7. \left(+\frac{7}{5}\right) - \left(+\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{3}{5}\right) \\ 4. \left(-\frac{11}{5}\right) + \left(+\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{7}{5}\right) & 8. \left(+\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{9}{5}\right) = \left(+\frac{11}{5}\right) \end{array}$$

Exercícios. Série VI

$$\begin{array}{l} 1. \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{7}{5}\right) = \\ 2. \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(+\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{9}{16}\right) + \left(+\frac{25}{12}\right) = \\ 3. \left(+\frac{9}{10}\right) - \left(+\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{11}{15}\right) - \left(+\frac{19}{20}\right) - \left(+3\frac{3}{4}\right) = \\ 4. \left(+2\frac{1}{2}\right) - \left(-3\frac{1}{3}\right) + \left(-4\frac{1}{4}\right) - \left(-5\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{9}{10}\right) = \\ 5. \left(+\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(+\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{8}{9}\right) = \\ 6. \left(-\frac{3}{5}\right) \div \left(+\frac{9}{10}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) \div \left(-\frac{5}{8}\right) = \\ 7. \left(+\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \quad 8. \left(-\frac{2}{5}\right)^4 + \left(-\frac{3}{5}\right) = \end{array}$$

(*) A primeira ampliação do campo numérico consiste na criação dos números fracionários.

CAPÍTULO II

Expressões Algébricas

21. Os símbolos algébricos. Os símbolos algébricos são os sinais de operação, de relação e de quantidade.

Começemos pelos sinais de operação.

A adição é indicada pelo sinal $+$; $a+b$ significa que, ao número a , é necessário somar o número b .

A subtração é indicada pelo sinal $-$; $a-b$ significa que, do número a , é necessário subtrair o número b .

Não esqueçamos que o sinal $+$ e o sinal $-$ raramente indicam a adição e a subtração; a função principal, quasi única, destes dois sinais é a de qualificar os números; lembremo-nos sempre de que $a+b$ e $a-b$ significam, respectivamente, $(+a)+(b)$ e $(+a)+(-b)$. A diferença $a-b$ é a soma dos números $(+a)$ e $(-b)$.

A multiplicação é indicada pelo sinal \times quando os fatores são numéricos, isto é, números. Quando os fatores são literais, isto é, letras, a multiplicação é indicada pela ligação destas mesmas letras; ab , abc , $abcd$, significam $a \times b$, $a \times b \times c$, $a \times b \times c \times d$. O mesmo acontece quando um dos fatores é numérico e os outros, literais: $5a$, $7ab$, $8xyz$ significam, respectivamente, $5 \times a$, $7 \times a \times b$, $8 \times x \times y \times z$. Em lugar de $a \times 3$, $5 \times b \times d$, $c \times 3 \times d \times 4$, escreveremos $3a$, $5bd$, $12cd$.

A divisão é indicada de três maneiras diferentes: $a \div b$, $a : b$, $\frac{a}{b}$; preferem-se as duas últimas.

A potenciação e a radiciação são indicadas como em Aritmética, e os números que entram nestas duas operações têm os mesmos nomes: base e expoente, radicando e índice.

Consideremos o produto $5a$; é o mesmo que $5 \times a$ ou $a \times 5$. Quando um produto contém um fator numérico, este é colocado em primeiro lugar, e dá-se-lhe o nome de *coeficiente*.

A definição geral do coeficiente, aplicável em qualquer caso, é a seguinte:

Dado um produto constituído de fatores numéricos e literais, chama-se **coeficiente**, o fator numérico d'êste produto. (*)

Assim, dados os produtos $5xy$, $\frac{3ab}{5}$, $ab\sqrt{2}$, $\frac{5xy\sqrt{2}}{4}$, seus coeficientes respectivos são 5 , $\frac{3}{5}$, $\sqrt{2}$, $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

N. B. O coeficiente 1 é sempre omitido. Em lugar de $1a$ é bastante escrever a . Lembrando que o expoente 1 é sempre omitido e que o primeiro termo de uma expressão aritmética, não sendo precedido pelo sinal $+$ ou $-$, é positivo, conclue-se que a forma completa do número a é $+1a^1$.

Os sinais que indicam relações entre duas quantidades a e b são diversos. Assim,

$a = b$ significa que a é igual a b
 $a > b$ " " a é maior que b
 $a < b$ " " a é menor que b
 $a \neq b$ " " a é diferente de b

Ainda existem outros sinais para indicar relações, e que serão conhecidos oportunamente.

Os sinais de quantidade são as *letras*. Estas representam quantidades conhecidas ou desconhecidas.

22. Expressão algébrica. Expressão algébrica é uma combinação de letras e números, ligados uns aos outros por sinais que indicam operações.

As expressões $2a - 3b + 5c - d$ $3ab + \sqrt{xy} - \frac{5abc}{3rs} + 7a^4$

são expressões algébricas.

Consideremos a seguinte expressão algébrica:

$$5a - 3bc + 4a^2 - 5c^3 + 3d$$

(*) J. I. Almeida Lisboa, obra citada, págs. 104 e 105.

Aroldo Martini Zuccagni, *Tratado de Algebra elementar*, 1.º volume, 15.ª edição, 1938, pág. 69.

Suponhamos que $a=5$, $b=4$, $c=2$, $d=10$. Podemos então efetuar as operações indicadas nesta expressão. Substituindo as letras pelos valores numéricos que lhes foram atribuídos, teremos:

$$5 \times 5 - 3 \times 4 \times 2 + 4 \times 5^2 - 5 \times 2^3 + 3 \times 10$$

Ora, para calcular esta expressão, já sabemos qual a regra a seguir; em primeiro lugar, as operações de terceira espécie, depois as de segunda, e por último as de primeira. Isto equivale a dizer que, para calcular a expressão algébrica dada, é necessário calcular em primeiro lugar as expressões parciais, $+5a$, $-3bc$, $+4a^2$, $-5c^3$ e $+3d$ e, em seguida, efetuar as adições e subtrações.

Cada uma das expressões parciais $5a$, $-3bc$, $4a^2$, $-5c^3$ e $3d$ é chamada **TÉRMO**.

Térmo é uma expressão algébrica cujos elementos não estão separados pelo sinal mais ou menos.

A expressão algébrica que tem somente um termo é chamada *monômio*; com dois termos é chamada *binômio*; com três, *trinômio*; em geral, tendo mais de um termo, é chamada *polinômio*.

Quando, em uma expressão algébrica monômia, não é mais possível efetuar operações ou simplificações, dizemos que êste monômio é *irredutível*; fica então constituído por um *fator numérico* e um ou mais *fatores literais*, dispostos em ordem alfabética. O fator numérico é, como já dissemos, o **coeficiente do monômio**. (§21)

Valor numérico de um polinômio é o valor que se obtém quando se substituem as letras por números e se efetuam as operações indicadas.

Um polinômio tem, em geral, uma infinidade de valores numéricos porque as letras podem ser substituídas por valores numéricos quaisquer.

Exercícios. Série VII

Supondo $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $f=6$, calcular o valor numéricos dos polinômios n.ºs 1 a 6.

1. $3a - 5b + 4c - 7d + 3e - 8f + 3$
2. $a + 2b + 3c - 4d - 5e - 5f - 7$
3. $8a + 7b - 4c - 9d + e - 15f + 5$
4. $5a - 7b + 8c - 9d - 6$
5. $3a + 5b - 7e - 8f - 7$
6. $2a + 11b - c - d + 8e - 10f - 8$

Sendo $x=2$, $y=3$, $z=5$, $a=4$, $b=6$, calcular o valor numérico dos polinômios n.ºs 7 a 10.

$$\begin{array}{ll} 7. 4xy + 7az - 5bx + a & 9. 4abx - 10ab - 7xyz \\ 8. 6ab - 3xy - 5xyz & 10. 5xy + 4yz - 8az - 4ab \end{array}$$

Supondo $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{3}{4}$, $d=\frac{4}{5}$, calcular o valor numérico dos polinômios n.ºs 11 a 14.

$$\begin{array}{ll} 11. 5a - 3b + 4c - 3d + \frac{3}{5} & 13. abc - abd - acd + bcd \\ 12. 3ab - 5bc + 2cd - 10ad & 14. 3ad - 5ac + 7bd - 2ab - \frac{2}{5} \end{array}$$

Supondo $a=2$, $b=-3$, $c=4$, $d=-5$, calcular o valor numérico dos polinômios n.ºs 15 a 25.

$$\begin{array}{ll} 15. 3a - 5b + 7c - 8d. & \\ 16. -4a + 5b - 3c + 6d & \\ 17. 4ab - 3bc + 2bcd - 6ad & \\ 18. 5a + 3b + 4c + 2d - ab - ac - ad - bd + 15 & \\ 19. 5ab + 3ac + 4ad + 2bd + 5cd + 7bc - 16 & \\ 20. abc + 2abd + 3bcd + 2ad + 3bc + 4cd - 10ac + 20 & \\ 21. a^3 + b^3 + c^3 + d^3 & 24. -a^5 + 4b^3 + 5c^2 - 2d^3 \\ 22. a^2 - b^4 + c - d^2 & 25. -3a^2b + 4ac^2 - 5b^2d^2 + 3abcd \\ 23. 3a^2 - 5b^2 - 4c^2 - 3d^2 & \end{array}$$

23. Termos semelhantes. São os que têm as mesmas letras com os mesmos expoentes; os coeficientes e os sinais podem ser iguais ou diferentes.

$$\begin{array}{rrrr} + 5a^2 & + 12x^2 & + 3abc & - 7a^2b^2 \\ + 8a^2 & - 5x^2 & - 8abc & - 8a^2b^2 \\ + 13a^2 & + 7x^2 & - 5abc & - 15a^2b^2 \end{array}$$

Dois termos semelhantes podem ser reduzidos a um só, como está indicado nos quatro exemplos acima. E' bastante operar com os coeficientes, aplicando as regras relativas aos números relativos.

$$\text{Primeiro exemplo: } + 5 + 8 = + 13; \quad + 5a^2 + 8a^2 = + 13a^2$$

$$\text{Segundo exemplo: } + 12 - 5 = + 7; \quad + 12x^2 - 5x^2 = + 7x^2$$

$$\text{Terceiro exemplo: } + 3 - 8 = - 5; \quad + 3abc - 8abc = - 5abc$$

$$\text{Quarto exemplo: } - 7 - 8 = - 15; \quad - 7a^2b^2 - 8a^2b^2 = - 15a^2b^2$$

Quando os coeficientes são fracionários, é conveniente fazer em separado as operações relativas aos mesmos.

$$+ \frac{3ab}{4} - \frac{2ab}{3} + 5ab - \frac{2ab}{5} - 3ab + \frac{7ab}{8} - ab = ?$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + 5 - \frac{2}{5} - 3 + \frac{7}{8} - 1 = \frac{187}{120}$$

$$\text{Resposta. A expressão dada é igual a } + \frac{187ab}{120}$$

N. B. Alguns autores separam o coeficiente fracionário, da parte literal, escrevendo $+ \frac{2}{3}ab$, $-\frac{5}{6}x^2y$, $+ \frac{3}{4}abc$, $-\frac{1}{2}mn$.

Os números mistos devem ser banidos do cálculo algébrico; em lugar de $3\frac{1}{2}ab$, $2\frac{3}{5}xy$, é mais simples escrever $\frac{7ab}{2}$, $\frac{13xy}{5}$.

Quando os termos semelhantes são numerosos, porém com coeficientes pequenos, a sua redução pode ser feita oralmente. Consideremos a expressão algébrica seguinte:

$$+ 3ab - 5ab + ab - 8ab + 7ab + 6ab - ab$$

E' constituída por 7 termos semelhantes; podemos então reduzi-la a um único termo, dizendo:

$$\begin{array}{lll} + 3 - 5 = - 2; & - 2 + 1 = - 1; & - 1 - 8 = - 9; \\ - 9 + 7 = - 2; & - 2 + 6 = + 4; & + 4 - 1 = + 3. \end{array}$$

E a expressão dada se reduz a um único termo: $+ 3ab$.

Exercícios. Série VIII

Efetuar a redução dos termos semelhantes que se seguem:

$$\begin{array}{lll} 1. + \frac{3a}{5} + \frac{a}{8} & 5. + \frac{5a^2}{6} - \frac{3a^2}{4} & 9. - \frac{b}{8} + \frac{5b}{6} \\ 2. + 5ab - \frac{3ab}{4} & 6. - 7abc + \frac{abc}{10} & 10. + \frac{xy}{4} - \frac{2xy}{5} \\ 3. - \frac{4abc}{9} + \frac{abc}{10} & 7. - 3ab + \frac{2ab}{3} & 11. + \frac{5a^2}{8} - \frac{3a^2}{5} \\ 4. - xyz + \frac{2xyz}{4} & 8. + \frac{7a^2b}{4} - \frac{3a^2b}{5} & 12. - \frac{9mn}{10} + \frac{2mn}{5} \end{array}$$

$$13. -xy + \frac{3xy}{4} + \frac{6xy}{5}$$

$$14. \frac{3xy}{4} - xy - 3xy - \frac{2xy}{5}$$

$$17. +a^2b - \frac{3a^2b}{5} + 5a^2b - \frac{9a^2b}{8} + \frac{7a^2b}{10} - \frac{5a^2b}{12} - a^2b$$

$$15. 4a^2 - \frac{7a^2}{8} + \frac{9a^2}{10}$$

$$16. -abc + \frac{3abc}{4} - 4abc + \frac{7abc}{10}$$

24. Ordenar um polinômio. Consideremos o polinômio
 $a^3 - 5a^7 + 6a - 8 + 9a^6 - 3a^2 - a^5 + 8a^4$ (A)

Este polinômio é constituído por oito termos que não permitem nenhuma simplificação ou redução; entretanto, ele pode ser ordenado, isto é, escrito do seguinte modo:

$$-5a^7 + 9a^6 - a^5 + 8a^4 + a^3 - 3a^2 + 6a - 8 \quad (B)$$

Um polinômio é a soma algébrica de todos os seus termos. E, desde que a ordem das parcelas não influe no valor da soma, conclue-se que os polinômios A e B são iguais. Entretanto, há uma diferença notável entre ambos; no segundo, os expoentes da letra a se apresentam em ordem decrescente.

Ordenar um polinômio é escrever todos os seus termos em uma ordem tal que os expoentes de uma mesma letra se apresentem em ordem crescente ou decrescente.

A letra escolhida para ordenar o polinômio é chamada letra ordenatriz.

25. Classificação das expressões algébricas. (*) Uma expressão algébrica pode ser racional ou irracional.

Uma expressão algébrica é racional quando não contém nenhuma letra submetida a radical; é irracional quando contém letras sob radical. Consideremos as expressões algébricas seguintes:

$$3a^2b + 7ab^2 - bc \quad \text{e} \quad 5a^2b - 7a\sqrt{b}$$

A primeira é racional e a segunda é irracional.

Uma expressão algébrica com expoentes fracionários é irracional. Com efeito,

$$3a - 5b + 7c^{\frac{1}{2}} = 3a - 5b + 7\sqrt{c} \quad (\S 40)$$

(*) Damos desde já esta classificação das expressões algébricas em obediência ao programa; entretanto, parece-nos preferível que tal assunto seja dado depois do §41 deste compêndio.

Entretanto, a expressão algébrica $5x - 4\sqrt[3]{a^6b^9}$ é racional. Na verdade, ela contém letras sob radical; mas, considerando que $\sqrt[3]{a^6b^9} = a^2b^3$ (§34), resulta que:

$$5x - 4\sqrt[3]{a^6b^9} = 5x - 4a^2b^3$$

Observação. O polinômio $5m - a\sqrt{2}$ é racional porque um polinômio é irracional quando contém letras sob radical.

Uma expressão algébrica e racional pode ser inteira ou fracionária.

E' inteira quando seus expoentes são números inteiros e positivos; quando não tem letras em denominador ou, se as tem, seus expoentes são números inteiros e negativos. (§39) Portanto, os polinômios racionais

$$(1) 3x^3 + 4xy \quad (2) 5a^2b - 7ab^2 + \frac{5c}{6}$$

$$(3) \frac{5}{a^{-3}} + 7a^2b - \frac{6a}{c^{-3}} \quad \dots \quad 5a^3 + 7^2ab - 6ac^3$$

são polinômios inteiros.

Observação. O polinômio (2) é inteiro porque não tem letras em denominador; a natureza dos coeficientes numéricos não influe na classificação.

Uma expressão algébrica e racional é fracionária, quando tem expoentes inteiros e negativos; (§39) quando tem letras em denominador, com expoentes inteiros e positivos. Portanto, os polinômios racionais

$$(4) \frac{3ab}{c^2} - \frac{5a^2}{7}$$

$$(5) \frac{5x}{4} - \frac{3x^2}{y^3}$$

$$(6) \frac{5ab^{-3}}{7} + \frac{3a^{-2}b}{8} \quad \dots \quad \frac{5a}{7b^3} + \frac{3b}{8a^2} \quad (\S 39)$$

são polinômios fracionários.

Um polinômio pode ser inteiro em relação a uma letra, e fracionário em relação a uma outra. Por exemplo, o polinômio

$$\frac{3a}{c} + \frac{5b}{7} - \frac{3x}{5y}$$

é fracionário de um modo geral; é inteiro em relação às letras a, b, x ; é fracionário em relação às letras c e y .

Observação. São as expressões algébricas racionais que podem ser inteiras ou fracionárias. Uma expressão irracional não é, de um modo geral, nem inteira, nem fracionária.

Entretanto, pode ser inteira ou fracionária em relação a uma ou algumas das letras que nela figuram.

Já aprendemos (§24) a ordenar um polinômio racional e inteiro. Um polinômio pode ser *completo* ou *incompleto*. É completo quando contém todas as potências da letra ordenatriz, desde a mais alta até a mais baixa, isto é, até a *potência zero*. (§38) Por exemplo, o polinômio

$$5a^6 - 7a^5b + 4a^4b^2 - 3a^3b^3 + 3a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

que também se pode escrever

$$5a^6b^0 - 7a^5b^1 + 4a^4b^2 - 3a^3b^3 + 3a^2b^4 - 6a^1b^5 + a^0b^6$$

é completo em relação à letra a porque, a partir de a^6 , ele contém todas as potências de a , inferiores à sexta potência, inclusive a potência zero, isto é, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1 e a^0 . O polinômio dado é também completo em relação à letra b , pelas mesmas razões.

Entretanto, os polinômios

$$5a^4 - 7a^3b + 4ab^3 + 5b^4 \quad \text{e} \quad 5a^3 - 7a^2b$$

são incompletos, porque o primeiro não contém a segunda potência de a , e o segundo não contém a primeira potência e a potência zero de a .

CAPÍTULO III

Operações Algébricas

26. Adição algébrica. Consideremos a expressão algébrica seguinte:

$$(3a+b) + (-5a+7b) + (8a-6b) + (-a-8b) + (-3a-b) \quad (A)$$

Nesta expressão está indicada a adição de cinco binômios. O sinal $+$ que liga os cinco binômios indica a adição; no binômio $3a+b$, o termo $3a$ é positivo; no binômio $8a-6b$, o termo $8a$ é também positivo. Isto pôsto, eliminando os parênteses (E.M.P.V. §84), resulta:

$$3a + b - 5a + 7b + 8a - 6b - a - 8b - 3a - b$$

Reduzindo os termos semelhantes, teremos $2a - 7b$.

E é nisto que consiste a adição dos polinômios.

Regra. Para efetuar uma adição algébrica, escrevem-se os polinômios dados, uns em continuação aos outros, cada termo com o seu sinal, e reduzem-se os termos semelhantes.

Exemplos

1. $(5a+b) + (-3a+2c) + (3b+5) + (-5c+3a) =$
 $5a+b-3a+2c+3b+5-5c+3a = 5a+4b-3c+5$
2. $(3a-2b+5c-6d) + (-4a+2b-5c-7d+e) =$
 $3a-2b+5c-6d-4a+2b-5c-7d+e = -a-13d+e$

Vamos calcular o valor numérico da expressão (A), fazendo $a=1$ e $b=2$. Teremos:

$$\begin{aligned} (3 \times 1 + 2) + (-5 \times 1 + 7 \times 2) + (8 \times 1 - 6 \times 2) + (-1 - 8 \times 2) + (-3 \times 1 - 2) = \\ (3+2) + (-5+14) + (8-12) + (-1-16) + (-3-2) = \\ 5+9-4-17-5 = 14-26 = -12 \end{aligned}$$

Calculando o valor numérico da soma, $2a - 7b$, teremos:

$$2a - 7b = 2 \times 1 - 7 \times 2 = 2 - 14 = -12$$

Portanto, o valor numérico da soma é igual à soma dos valores numéricos das parcelas, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números, na soma e nas parcelas.

A **adição algébrica** é a operação que tem por fim, dados dois ou mais polinômios chamados **parcelas**, formar um polinômio chamado **soma**, cujo valor numérico seja sempre igual à soma dos valores numéricos das parcelas, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números (ou valores), aliás quaisquer, na soma e nas parcelas.

Às vezes, quando os polinômios são muitos, é conveniente dar à adição algébrica uma disposição semelhante à da adição aritmética.

$$\begin{array}{r}
 (5a^3 - 7a^2b + 8ab^2 - b^3 + 5) + (8a^2b - 5ab^2 - 9) + (7 - 8b^3 - 9a^3) + \\
 + (6b^3 + 4 - ab^2 + a^2b - 4a^3) + (6a^3 - 11ab^2 - 3b^3 - 1) + (4a^2b + 4b^3 + 10) = \\
 \begin{array}{r}
 + 5a^3 - 7a^2b + 8ab^2 - b^3 + 5 \\
 + 8a^2b - 5ab^2 - 9 \\
 - 9a^3 - 8b^3 + 7 \\
 - 4a^3 + a^2b - ab^2 + 6b^3 + 4 \\
 + 6a^3 - 11ab^2 - 3b^3 - 1 \\
 + 4a^2b + 4b^3 + 10
 \end{array}
 \end{array}$$

Escrevem-se os polinômios parcelas uns por baixo dos outros, de modo que os termos semelhantes se correspondam em linhas verticais; em seguida, faz-se

$$Soma = -2a^3 + 6a^2b - 9ab^2 - 2b^3 + 16$$

a redução dos termos semelhantes. Esta disposição não é necessária, mas é conveniente para evitar enganos.

Exercícios. Calcular o valor numérico de cada um destes seis polinômios e do polinômio soma, fazendo $a=1$ e $b=2$, e verificar mais uma vez que o valor numérico do polinômio soma é igual à soma dos valores numéricos dos polinômios parcelas.

Exercícios. Série IX

N. B. É conveniente dar à adição algébrica uma disposição semelhante à da aritmética.

- $(3a - 5b + 7c) + (6b - 7a + 10c) + (-9a + 11b - 20c) + (c - b - a) =$
- $(4a^2 - 5b^2 + 7c^2 - 8) + (15 - 6c^2 + 9b^2 - 3a^2) + (8a^2 + c^2 - 9) + (7b^2 - 15c^2 + 11) + (3a^2 - 12b^2 + 12) + (a^2 + b^2 + c^2) + (-20) =$
- $(a^2 + b) + (a + b^2) + (3a^2 - 5b^2) + (5a - 7b) + (4a^2 - 9a + 5) + (8b^2 - 11b - 6) + (-3a^2 + 6b^2 - 7a - 8b - 15) =$
- $(ab + ac) + (ab + bc) + (3ab - 3ac - 5bc) + (-5ab - 5ac) + (-ab - 2bc) + (-3ab + 5bc - 7ac - 8) =$

- $(2a - 3b + 5y - 8) + (-3a + 3b + 2x + 7) + (-2 - 3x - 4y - 5b - 6a) + (5a - 6x + 8b - 11y + 20) =$
- $(7a^3 - 5a^2b + 8ab^2 - 9b^3 + 10) + (-6a^3 + 6a^2b - 9ab^2 + 10b^3 - 10) + (5b^3 - 8ab^2 + 7a^2b - 10a^3) + (-6a^3 - 8a^2b + 9ab^2 - 6b^3 + 1) =$

27. Subtração algébrica. Consideremos a expressão algébrica seguinte:

$$(3a - 5b + 7c) - (2a - 7b + 8c + 7) \quad (B)$$

Esta expressão significa que, do polinômio $3a - 5b + 7c$ é necessário subtrair o polinômio $2a - 7b + 8c + 7$. O sinal $-$ que liga os dois polinômios está indicando a subtração que se deve efetuar; o primeiro termo de cada polinômio é positivo.

Isto pôsto, e eliminando os parênteses (E.M.P.V. § 84), resulta;

$$3a - 5b + 7c - 2a + 7b - 8c - 7$$

Reduzindo os termos semelhantes, teremos: $a + 2b - c - 7$. É isto que consiste a subtração algébrica.

Regra. Para efetuar uma subtração algébrica, escreve-se o subtraendo depois do minuendo, tendo, porém, o cuidado de trocar os sinais dos termos do subtraendo; em seguida, reduzem-se os termos semelhantes.

Exemplos

- $(5a + 3b - c) - (2a + 5b - 3c) = 5a + 3b - c - 2a - 5b + 3c = 3a - 2b + 2c$
- $(-7x + 4y - a) - (-8x + 5y - b) = -7x + 4y - a + 8x - 5y + b = x - y - a + b$

Calculemos o valor numérico da expressão B, fazendo $a=1$, $b=2$ e $c=3$. Teremos:

$$\begin{aligned}
 (3 \times 1 - 5 \times 2 + 7 \times 3) - (2 \times 1 - 7 \times 2 + 8 \times 3 + 7) &= \\
 (3 - 10 + 21) - (2 - 14 + 24 + 7) &= \\
 14 - 19 &= -5
 \end{aligned}$$

Calculando o valor numérico do resto $a + 2b - c - 7$ teremos: $a + 2b - c - 7 = 1 + 2 \times 2 - 3 - 7 = 1 + 4 - 3 - 7 = -5$

Portanto, o valor numérico do resto é igual à diferença entre os valores numéricos do minuendo e do subtraendo, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números, nos três polinômios.

A **subtração algébrica** é a operação que tem por fim, dados dois polinômios chamados, respectivamente, **minuendo** e **subtraendo**,

formar um terceiro polinômio chamado resto, cujo valor numérico seja sempre igual à diferença entre os valores numéricos dos dois polinômios dados, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números (ou valores), aliás quaisquer, nos três polinômios.

Exercícios. Série X

1. $(3a - 5b + 7c - 2d + 9) - (5a - 11b + 8c + 3d + 10) =$
2. $(5a^2 - 8b^2 + 9c^2 - 10d^2 + 5e) - (-7a^2 + 9b^2 - 10d^2 + 8) =$
3. $(a + b + c + d + e + f) - (-a - b - c - d - e - f) =$
4. $(8ab - 3ac + 9ad - 5af) - (5ab - 7ac + 11ad - 8af) =$
5. $(7ax - 9ay + 11az - 7) - (5ab - 9ac + 8ad - 8) =$
6. $(5a - 5b + 6c - 7d + 8) - (5m + 5n + 6r - 7s + 8) =$
7. $(8a^3 - 7a^2 + 9a - 5) - (-7 + 11a - 8a^2 + 5a^3) =$
8. $(2a - 3b + 5c - 6d + 7e - 10) - (15 + 8e - 10d + 9c - 7b + a) =$
9. $(-11a - 12b - 13c - 14d - 15e) - (-14a - 15b - 16c - 17d - 20e) =$
10. $(-3abc + 7abd - 8abe + 15) - (-7abc + 10abd - 5abe + 20) =$
11. $-(3a - 5b) + (-7c - 2a) - (6a + b - c) - (-3c + a + 10b) =$
12. $-(2a - 3b + c) + (5a - 6b + 7c) - (a - b - c) + 2a - 2b + 3c =$
13. $(x + y) - (-2x + 3y) + (5x - 7) - (-8 + 3y) - (x - y - 10) =$
14. $3a - [5a - (7b + 3c) + 10b] - [- (2a - 5c) + 7b] =$

N. B. Em primeiro lugar eliminam-se os parênteses; depois reduzem-se os termos semelhantes entre os colchetes; por último eliminam-se os colchetes.

$$15. -5a + [(2a - b) - (3b + 5a)] - [9c - (4a - 3b + 2c) - (-10a)] =$$

$$16. x - \{3x - [2x - (5 + 7x - a) + 3a] - (2a - 8)\} =$$

N. B. Procede-se como no exercício 14, eliminando as chaves em último lugar.

$$17. (5a - 3b) - [b - (6a + 8b)] - \{[7a - (b - a) + 5] - (3a - 3b)\} =$$

18. Sendo $A = a + b + c$, $B = c - a + b$, $C = c - b + a$, $D = c - a - b$, calcular $A - B + C - D$, $(A + B) - (C + D)$, $(A - B) - (C - D)$.

28. **Potência de um número.** Já vimos em que consiste uma potência qualquer de um número. (E.M.P.V. § 86)

Aprendemos também os principais teoremas relativos à potenciação, entre os quais devemos lembrar o primeiro, a saber:

O produto de duas potências com a mesma base, e com expoentes iguais ou diferentes, é uma potência cuja base é a mesma das duas potências dadas, e cujo expoente é a soma dos expoentes das duas bases dadas. Abreviadamente diremos:

Para multiplicar duas potências com a mesma base, é bastante somar os expoentes. (E.M.S.V. § 43)

Por exemplo, $2^5 \times 2^3 = 2^8$. E, de um modo geral,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Este teorema se estende facilmente ao caso de três ou mais potências. Por exemplo:

$$a^2 \times a^3 \times a^4 = a^5 \times a^4 = a^9$$

$$x^3 \times x^4 \times x^5 \times x^6 = x^{12} \times x^6 = x^{18}$$

E assim por diante.

Podemos pois estabelecer de um modo geral que:

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \dots = a^{m+n+p+q+\dots}$$

29. **Multiplicação de monômios.** Examinemos alguns exemplos.

I. $4a \times 5b$.

Já sabemos que $4a$ significa $4 \times a$ e $5b$, $5 \times b$ (§ 21). Portanto,

$$4a \times 5b = (4 \times a) \times (5 \times b)$$

Em virtude da lei associativa da multiplicação (E.M.P.V. § 72, III), podemos escrever:

$$4a \times 5b = 4 \times a \times 5 \times b$$

Lembrando a lei comutativa da multiplicação (E.M.P.V. § 72, I), teremos:

$$4a \times 5b = 4 \times 5 \times a \times b$$

Voltando à lei associativa da multiplicação.....

$$4a \times 5b = 20 \times ab$$

E, finalmente, (§ 24)

$$4a \times 5b = 20ab$$

II.

$$\begin{aligned} 4c \times 3c &= 4 \times c \times 3 \times c \\ &= 4 \times 3 \times c \times c \\ &= 12 \times c^2 \\ &= 12c^2 \end{aligned}$$

(*)

(*) Deixamos aos estudantes o prazer de justificarem estas transformações.

$$\begin{aligned}
 \text{III.} \quad 4a^2 \times 5b^2 &= 4 \times a^2 \times 5 \times b^2 \\
 &= 4 \times 5 \times a^2 \times b^2 \\
 &= 20 \times a^2 \times b^2 \\
 &= 20a^2b^2 \quad (*) \\
 \text{IV.} \quad 3a^2b \times 5ab^2c &= 3 \times a^2 \times b \times 5 \times a \times b^2 \times c \\
 &= 3 \times 5 \times a^2 \times a \times b \times b^2 \times c \\
 &= 15 \times a^3 \times b^3 \times c \\
 &= 15a^3b^3c \quad (*)
 \end{aligned}$$

Examinando os quatro resultados concluímos que :

Regra. Para multiplicar dois monômios quaisquer, multiplicam-se os coeficientes e, à direita deste produto, escrevem-se as letras que entram nos dois monômios, dando a cada letra no produto, um expoente igual à soma dos expoentes desta mesma letra em cada fator. Sendo os coeficientes números relativos, é necessário atender à regra dos sinais. (§18)

Exemplos

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad 5a^3 \times 6a^2 = 30a^5 & 4. \quad 7ab \times (-4a) = -28a^2b \\
 2. \quad (-7x^2y)(-5xy^2) = 35x^3y^3 & 5. \quad (-a^2b) \times 3ab^2 = -3a^3b^3 \\
 3. \quad (-5a^2b^2) \times 3ab^2 = -15a^3b^4 & 6. \quad (-8ab)(-1) = 8ab
 \end{array}$$

Exercícios. Série XI

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{3a^2b}{4} \times 5ab^2 \times \frac{a^2b^2}{2} \times \frac{2ab}{3} &= \\
 2. \quad \frac{5a^2c}{8} \times \frac{3abc}{4} \times \frac{5a^2b^2}{6} \times \frac{a^2b^2c^2}{5} &= \\
 3. \quad 4xy \times \left(-\frac{x^2}{5}\right) \left(-\frac{4x^2}{7}\right) \left(-\frac{14xy^2}{15}\right) &= \\
 4. \quad \left(-5b^2m\right) \left(-\frac{7bm^2}{10}\right) \left(-\frac{2m}{7}\right) (-1) &=
 \end{aligned}$$

5. No primeiro exercício, fazendo $a=2$ e $b=1$, calcular o valor numérico de cada monômio fator e do produto e verificar que o valor numérico do produto é igual ao produto dos valores numéricos dos fatores.

6. Mesmo exercício em relação ao n.º 2, fazendo $a=1$, $b=2$ e $c=3$.

7. Mesmo exercício em relação ao n.º 3, fazendo $x=2$ e $y=1$.

8. Mesmo exercício em relação ao n.º 4, fazendo $b=3$ e $m=2$.

30. Multiplicação de um polinômio por um monômio.

Já aprendemos a propriedade distributiva da multiplicação.

(E.M.P.V. §72, IV) Ela nos ensina que, para multiplicar uma soma por um número, multiplica-se cada uma das parcelas por este número e, em seguida, somam-se os produtos parciais obtidos. Por exemplo,

$$(7 + 4 + 5) \times 3 = 7 \times 3 + 4 \times 3 + 5 \times 3$$

Podemos, pois, escrever de um modo geral que :

$$(a + b + c + \dots) \times m = am + bm + cm + \dots$$

E resulta assim a seguinte

Regra. Para multiplicar um polinômio por um monômio, multiplica-se cada termo do polinômio pelo monômio e somam-se os produtos parciais.

Exemplos

$$\begin{aligned}
 1. \quad (3a^2 - 5ab + b^2)7ab &= 21a^3b - 35a^2b^2 + 7ab^3 \\
 2. \quad (-5x^2 + 7xy - 9y^2)(-4xy) &= 20x^3y - 28x^2y^2 + 36xy^3 \\
 3. \quad (7ab - 5bc + 8d)(-1) &= -7ab + 5bc - 8d \\
 4. \quad (-5x^3 - 8x^2 + 9x)(-2) &= 10x^3 + 16x^2 - 18x
 \end{aligned}$$

Exercícios. Série XII

1. $(2a - 3b + 4c - 5d) \times 5x =$
 2. Fazendo $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$ e $x=5$, verificar no exercício anterior que o valor numérico do produto é igual ao produto dos valores numéricos dos dois fatores.

$$\begin{aligned}
 3. \quad (a^2 - a^2 + a - 5)(-5ab) &= \\
 4. \quad (5a^2 - 7b + 8c - d) \times 4ab &= \\
 5. \quad (7a^3 - 5a^2b + 8ab^2 - 9b^3)(-2ab) &= \\
 6. \quad (ac - 3ad + 4ae - 5af) \times 8adef &= \\
 7. \quad (-8)(x^2 - x^2 + x - 5) &= \\
 8. \quad (-3ab)(a^2 - 5a^2b + 7ab^2 - 8b^3) &= \\
 9. \quad \left(\frac{3a^2}{4} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{ab^2}{3} - \frac{2b^3}{5}\right)(-12a^2b^2) &= \\
 10. \quad (-1)(a^4 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1)(-1) &= \\
 11. \quad 7(4a - b) + 5(3a - 2b) - 4(5a - b) - 6(a - 3b) &= \\
 12. \quad (5a^2 - 7ab + 8b^2)(-ab) - (6a^2 - 3ab + 5b^2)(-2ab) &= \\
 13. \quad (5a - 7b + 3c + 2)(-1) + (a - 2b - 3c - 4d)(-2) - (-a + b + c + d)(-3) &= \\
 14. \quad 3a(2b - 5c) + 5b(3a - 4c) - (4a - 3b)6c &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Solução.} \quad (6ab - 15ac) + (15ab - 20bc) - (24ac - 18bc) &= \\
 6ab - 15ac + 15ab - 20bc - 24ac + 18bc &= 21ab - 39ac - 2bc
 \end{aligned}$$

15. $a(3b-4c+8d) - 2a(6d-7c+3b) - 3a(-4b-d+6c) =$
 16. $5ab-7b(3a-2c) + 4c(3b+2a) - 5a(-6b-c-7) =$
 17. $-2a(5b-x) - 3a(5c-4) + 4b(-3a-2) + (-2ax+11ac-11a) =$

31. **Multiplicação de dois polinômios.** Consideremos o seguinte exemplo:

$$(a+b+c)(m+n)$$

Considerando como efetuadas as operações indicadas dentro dos primeiros parênteses (E.M.P.V. § 83) teremos:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(m+n) &= (a+b+c)m + (a+b+c)n \\ &= (am+bm+cm) + (an+bn+cn) \quad (\S 30) \\ &= am + bm + cm + an + bn + cn\end{aligned}$$

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

Regra. Para multiplicar dois polinômios, multiplica-se cada termo do primeiro por cada termo do segundo e somam-se os produtos parciais.

Observação. De acordo com esta regra, se multiplicarmos um polinômio com m termos por um outro com n termos, o produto terá $m+n$ termos. Entretanto, o número de termos do produto é geralmente inferior a $m+n$, sendo no mínimo igual a dois. (§ 46)

Exemplos

1. $(a^2-2ab+b^2)(a-b) =$

$$\begin{array}{r} a^2-2ab+b^2 \\ a-b \\ \hline a^3-2a^2b+ab^2 \\ -a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$$

mo do multiplicador, isto é, efetuam-se os produtos $a^2 \times (-b)$, $(-2ab) \times (-b)$ e $b^2 \times (-b)$. Finalmente, somam-se os produtos parciais $a^3-2a^2b+ab^2$ e $-a^2b+2ab^2-b^3$.

2. $(a^3-a^2+a-5)(a^2+a-3) =$

$$\begin{array}{r} a^3-a^2+a-5 \\ a^2+a-3 \\ \hline a^5-a^4+a^3-5a^2 \\ +a^4-a^3+a^2-5a \\ -3a^3+3a^2-3a+15 \\ \hline a^5-3a^3-a^2-8a+15 \end{array}$$

Escrevem-se os dois polinômios como está indicado ao lado. Multiplica-se cada termo do multiplicador, isto é, efetuam-se os produtos $a^2 \times a$, $(-2ab) \times a$ e $b^2 \times a$; depois multiplica-se cada termo do multiplicando pelo segundo termo

No segundo exemplo temos três produtos parciais resultantes das três multiplicações seguintes:

$$\begin{aligned}(a^3-a^2+a-5)a^2 \\ (a^3-a^2+a-5)a \\ (a^3-a^2+a-5)(-3)\end{aligned}$$

3. $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b) =$

$$\begin{array}{r} a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ a-b \\ \hline a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3 \\ -a^3b-a^2b^2-ab^3-b^4 \\ \hline a^4-b^4 \end{array}$$

No terceiro exemplo, se o multiplicando tem 4 termos e o multiplicador tem 2, o produto deveria ter 8; entretanto há no 3.º exemplo numerosos termos simétricos, e o produto se reduz a dois termos apenas, isto é, ao binômio a^4-b^4 .

4. $(5x^2+2-3x+4x^3)(-2x+5+3x^2) =$

$$\begin{array}{r} 4x^3+5x^2-3x+2 \\ 3x^2-2x+5 \\ \hline 12x^5+15x^4-9x^3+6x^2 \\ -8x^4-10x^3+6x^2-4x \\ +20x^3+25x^2-15x+10 \\ \hline 12x^5+7x^4+x^3+37x^2-19x+10 \end{array}$$

tos, (§ 25) convém dispor os produtos parciais de um modo especial, para facilitar a redução dos termos semelhantes. E' preferível tomar como multiplicando, o polinômio que tem maior número de termos.

5. $(x^5+x-x^3-6)(x^4-x^3+x^2-x+7) =$

$$\begin{array}{r} x^4-x^3+x^2-x+7 \\ x^5-x^3+x-6 \\ \hline x^9-x^8+x^7-x^6+7x^5 \\ -x^7+x^6-x^5+x^4-7x^3 \\ +x^5-x^4+x^3-x^2+7x \\ -6x^4+6x^3-6x^2+6x-42 \\ \hline x^9-x^8+7x^5-6x^4-7x^2+13x-42 \end{array}$$

6. $(2x^4-3x^3+x-1)(x+2) =$

$$\begin{array}{r} 2x^4-3x^3+x-1 \\ x+2 \\ \hline 2x^5-3x^4+x^2-x \\ +4x^4-6x^3+2x-2 \\ \hline 2x^5+x^4-6x^3+x^2+x-2 \end{array}$$

$$7. (x^4 - 3x^2 + 2x + 1)(x^3 - 2x - 2)$$

$$x^4 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$x^3 - 2x - 2$$

$$x^7 - 3x^5 + 2x^4 + x^3$$

$$- 2x^5 + 6x^3 - 4x^2 - 2x$$

$$- 2x^4 + 6x^2 - 4x - 2$$

$$x^7 - 5x^5 + 7x^3 + 2x^2 - 6x - 2$$

$$8. (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)(a + b + c) =$$

$$a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2$$

$$a + b + c$$

$$a^3 - a^2b - a^2c + ab^2 - abc + ac^2$$

$$+ a^2b - ab^2 - abc + b^3 - b^2c + bc^2$$

$$+ a^2c - abc - ac^2 + b^2c - bc^2 + c^3$$

$$a^3 - 3abc + b^3 + c^3$$

Observação. Neste exemplo ordena-se o multiplicando de acordo com as potências decrescentes de a ; em seguida, ordenam-se os termos restantes de acordo com as potências decrescentes de b .

Voltemos ao primeiro exemplo. Se fizermos $a=3$ e $b=1$, nos polinômios fatores e no polinômio produto, verificaremos que o valor numérico do produto é igual ao produto dos valores numéricos dos fatores. O mesmo acontecerá no segundo exemplo, se fizermos $a=10$, e no terceiro, fazendo $a=5$ e $b=2$. (Os estudantes devem fazer estas verificações.) Podemos, pois, estabelecer que:

A multiplicação algébrica é a operação que tem por fim, dados dois polinômios chamados respectivamente **multiplicando** e **multiplicador**, formar um terceiro polinômio chamado **produto**, cujo valor numérico seja sempre igual ao produto dos valores numéricos dos dois fatores, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números, (ou valores) aliás quaisquer, nos três polinômios.

Exercícios. Série XIII

- $(a^4 - 3a^3 + 7a^2 - 5a + 8)(a^2 - 4a + 5) =$
- $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)(a^2 - 2ab + b^2) =$
- $(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) =$
- $(5a^2b + 7ab + 8b)(7a^3b + 6a^2b - 5ab - 8b) =$

$$5. (5a - 6a^2 + 10 + 4a^3)(5a^2 + a^3 - 5a + 7) =$$

$$6. (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1) =$$

$$7. (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)(x - 2) =$$

$$8. \left(\frac{2a^3}{3} - \frac{a^2}{4} + \frac{2a}{5} - \frac{3}{4}\right)\left(a^2 - \frac{3a}{4} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$9. (a + b + c)^2 =$$

$$12. (2a - 5b + 3c)^2 =$$

$$10. (x - y + z - u)^2 =$$

$$13. \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}\right)^2 =$$

$$11. (a + 2b + 3c)^2 =$$

$$14. \left(\frac{x}{3} - \frac{2y}{5}\right)^2 =$$

$$15. (a^2 - 3a + 7)(a - 5) - (a^3 - 5a^2 + 7a - 8)(3a + 1) =$$

$$16. (5x + 4x^2 + x^3 - 24)(x^2 + 11 - 4x)$$

$$17. (x^3 + 11x - 4x^2 - 24)(x^2 + 5 + 4x)$$

$$18. (x^4 + x^2 - 4x - 11 + 2x^3)(x^2 - 2x + 3)$$

$$19. (a + 5)(-3 + a)(a - 2)(-2 + a)$$

$$20. (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

32. Fórmulas de multiplicação; identidades. Algumas vezes, o produto de duas expressões algébricas, particularmente o de dois binômios, pode ser obtido sem efetuar a multiplicação das mesmas. Chega-se a este resultado pelo conhecimento de algumas fórmulas que vamos aprender.

I. Calculemos a expressão $(a + b)^2$, isto é, $(a + b)(a + b)$. Efetuando-se a multiplicação indicada, resulta $a^2 + 2ab + b^2$.

$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$	<p>[Primeira fórmula]</p> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ <p>O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais o duplo produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.</p>
--	---

Exercícios orais

Calcular mentalmente as expressões seguintes:

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1. $(x + y)^2$ | 3. $(c + d)^2$ | 5. $(e + f)^2$ | 7. $(a + 3)^2$ |
| 2. $(m + n)^2$ | 4. $(r + s)^2$ | 6. $(t + u)^2$ | 8. $(b + 5)^2$ |

- | | | |
|-------------------|-----------------------|-------------------------|
| 9. $(c + 4)^2$ | 16. $(5r + 2s)^2$ | 23. $(a^2b + bc^2)^2$ |
| 10. $(r + 1)^2$ | 17. $(5e + f)^2$ | 24. $(abc + 4)^2$ |
| 11. $(s + 10)^2$ | 18. $(5a^2 + 7b^2)^2$ | 25. $(a^2b^2 + a^2x)^2$ |
| 12. $(t + 7)^2$ | 19. $(3m^4 + 5n^2)^2$ | 26. $(3a + 2bc)^2$ |
| 13. $(2a + 3b)^2$ | 20. $(8r^2 + 2s)^2$ | 27. $(5 + 7abc)^2$ |
| 14. $(5m + 3n)^2$ | 21. $(4x^3 + 5y^2)^2$ | 28. $(3xy + 8a^2)^2$ |
| 15. $(4c + 3d)^2$ | 22. $(5ab + 3)^2$ | |

II. Calculemos a expressão algébrica $(a - b)^2$, isto é, $(a - b)(a - b)$. Efetuando-se a multiplicação indicada, resulta $a^2 - 2ab + b^2$.

$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$	<p>[Segunda fórmula]</p> $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ <p>O quadrado da diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro, menos o duplo produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.</p>
--	--

Exercícios orais

Repetir os exercícios relativos à primeira fórmula, trocando o sinal *mais* pelo sinal *menos*.

III. Calculemos a expressão algébrica $(a + b)(a - b)$. Efetuando-se a multiplicação indicada, resulta $a^2 - b^2$.

$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$	<p>[Terceira fórmula]</p> $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ <p>A soma de dois números, multiplicada pela diferença dos mesmos dois números, é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.</p>
--	---

Exercícios orais

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1. $(c + d)(c - d) =$ | 8. $(m + n)(m - n) =$ |
| 2. $(r + s)(r - s) =$ | 9. $(x + y)(x - y) =$ |
| 3. $(a + 3)(a - 3) =$ | 10. $(m + 5)(m - 5) =$ |
| 4. $(r + 1)(r - 1) =$ | 11. $(x + 7)(x - 7) =$ |
| 5. $(2a + b)(2a - b) =$ | 12. $(a + 3m)(a - 3m) =$ |
| 6. $(5r + 3s)(5r - 3s) =$ | 13. $(2x + y)(2x - y) =$ |
| 7. $(5a^2 + 3b)(5a^2 - 3b) =$ | 14. $(5ab + 3c)(5ab - 3c) =$ |

$$\text{IV. } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

[Quarta fórmula]

$$\text{V. } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

[Quinta fórmula]

Observação. Deixamos aos estudantes o cuidado de demonstrarem e traduzirem em linguagem ordinária as fórmulas IV e V.

Exercícios orais

Calcular mentalmente as expressões seguintes:

- | | | | |
|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| 1. $(x + y)^2$ | 3. $(a + 2)^2$ | 5. $(2a + 1)^2$ | 7. $(x + 3)^2$ |
| 2. $(x - y)^2$ | 4. $(a - 2)^2$ | 6. $(2a - 1)^2$ | 8. $(x - 2)^2$ |

VI.
$$\begin{array}{r} x + 5 \\ x + 4 \\ \hline x^2 + 5x \\ + 4x + 20 \\ \hline x^2 + 9x + 20 \end{array}$$

Consideremos a expressão $(x + 5)(x + 4)$. É um produto de dois binômios, cujos primeiros termos são iguais. Efetuando a multiplicação indicada, acharemos $x^2 + 9x + 20$. Ora, se observarmos com atenção a operação realizada, concluiremos que esta é dispensável. É bastante observar que:

$$(x + 5)(x + 4) = x^2 + (5 + 4)x + 5 \times 4$$

[Sexta fórmula]

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Esta fórmula significa que:

O produto de dois binômios que têm um termo comum é igual ao quadrado do termo comum; mais a soma algébrica dos termos diferentes, multiplicada pelo termo comum; mais o produto algébrico dos termos diferentes.

Exemplos

$(a + 3)(a + 5) = a^2 + 8a + 15$	$(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$
$(m + 8)(m - 5) = m^2 + 3m - 40$	$(c + 3)(c - 5) = c^2 - 2c - 15$

Exercícios orais

Calcular as expressões seguintes:

- | | | |
|---------------------|------------------------|-----------------------|
| 1. $(a + 7)(a + 1)$ | 4. $(b - 5)(b + 6)$ | 7. $(ab + 7)(ab - 4)$ |
| 2. $(x + 5)(x + 6)$ | 5. $(c - 3)(c - 4)$ | 8. $(d - 4)(d + 7)$ |
| 3. $(m + 9)(m - 4)$ | 6. $(3x - 2m)(3x + m)$ | 9. $(e + 8)(e + 5)$ |

- | | | |
|------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 10. $(a + 2b)(a + 5b)$ | 14. $(a^2 - 5)(a^2 + 3)$ | 18. $(5x + 1)(5x - 2)$ |
| 11. $(a - 3x)(a + 5x)$ | 15. $(2a + 5)(2a - 4)$ | 19. $(2a + b)(2a + 2b)$ |
| 12. $(x + 4m)(x - 3m)$ | 16. $(3m - 4)(3m + 7)$ | 20. $(3x + 5)(3x - 6)$ |
| 13. $(4a + c)(4a - c)$ | 17. $(2c + 5)(2c - 6)$ | 21. $(x^2 - 2a)(x^2 + 3a)$ |

VII.
$$\begin{array}{r} 2x + 5 \\ 3x + 7 \\ \hline 6x^2 + 15x \\ + 14x + 35 \\ \hline 6x^2 + 29x + 35 \end{array}$$

$6x^2 + 29x + 35$. Ora, se observarmos com atenção a operação realizada, verificaremos que, na prática, esta operação é também dispensável. Com efeito,

a) O primeiro termo do produto resulta da multiplicação dos primeiros termos dos dois binômios.

b) O segundo termo do produto é a soma dos dois produtos que se obtêm, supondo um binômio colocado por baixo do outro, e multiplicando em cruz os quatro termos dos dois binômios.

c) O terceiro termo do produto resulta da multiplicação dos segundos termos dos dois binômios.

Exemplos

- $(5a + 3)(7a + 2) = 35a^2 + (+10a + 21a) + 6 = 35a^2 + 31a + 6$
- $(3x + 4)(5x - 6) = 15x^2 + (-18x + 20x) - 24 = 15x^2 + 2x - 24$
- $(4m - 7)(3m + 2) = 12m^2 + (+8m - 21m) - 14 = 12m^2 - 13m - 14$
- $(3c - 5)(4c - 7) = 12c^2 + (-21c - 20c) + 35 = 12c^2 - 41c + 35$

[Sétima fórmula]

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Observação. Na prática, os estudantes calcularão o segundo termo do produto, multiplicando em primeiro lugar os termos extremos e depois os termos centrais dos dois binômios dados. No primeiro exemplo, sendo $5a$ e 2 os termos extremos, e 3 e $7a$, os termos centrais, dirão: $5a \times 2 = 10a$; $3 \times 7a = 21a$; $10a + 21a = 31a$.

Exercícios orais

Calcular as seguintes expressões:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1. $(2a + 5)(3a + 1)$ | 7. $(a^2 + 5)(3a^2 - 4)$ |
| 2. $(m + 3)(2m + 4)$ | 8. $(ab + 3)(3ab - 5)$ |
| 3. $(3x - 2)(2x - 5)$ | 9. $(3xy - 1)(4xy + 5)$ |
| 4. $(5c - 4)(3c + 2)$ | 10. $(3ab + 2c)(ab + 3c)$ |
| 5. $(3y - 1)(4y - 2)$ | 11. $(m^2 + 3)(m^2 - 1)$ |
| 6. $(2a + b)(3a + 2b)$ | 12. $(5ac - 4)(3ac + 2)$ |

Em resumo, as principais fórmulas elementares de multiplicação algébrica são sete, a saber:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

Conhecendo bem estas fórmulas, os estudantes podem evitar, na prática, numerosas multiplicações de binômios.

As sete fórmulas que acabámos de aprender são igualdades que subsistem sempre, sejam quais forem os valores atribuídos às letras que nelas figuram, *contanto que estes valores sejam os mesmos para ambos os membros de cada uma delas*. Tais igualdades chamam-se *identidades*.

Identidade é uma igualdade que se verifica sempre, sejam quais forem os valores numéricos atribuídos às letras que nela figuram.

As igualdades constituídas exclusivamente de números entram na categoria das identidades. Assim,

$3 \times 8 = 24$ $3 \times 8 = 6 \times 4$ $3 \times 8 = 48 \div 2$
são identidades.

Exercícios. Série XIV

Calcular as expressões que se seguem, fazendo uso das fórmulas de multiplicação.

1. $(2a+3b)^2 - (5a-2b)^2 + (3a+b)(3a-b)$
2. $(x+5)(x+7) - (x-4)(x-3) + (2x-3)^2 - (4-3x)^2$
3. $(a+b)^3 - (a-b)^3 + (2a-3b)^3$
4. $(3x+5)(2x-5) - (2x+3)^2 - (5x+2)(3x-4)$
5. $(4a+3b)(5a+2b) + (3a+2b)^2 - (7a+b)(7a-b)$
6. $(m+5)^2 - (m-4)^2 + (3m+2)(3m-2) - (m+5)(m-4)$

Transformar os trinômios seguintes em produtos de dois binômios, isto é, descobrir os dois binômios que, multiplicados um pelo outro, reproduzem os trinômios dados.

- | | | |
|------------------|-----------------------|------------------------------|
| 7. $x^2+12x+36$ | 14. $a^2-8a+16$ | 21. $x^2+28x+196$ |
| 8. $y^2+24y+144$ | 15. $a^2-50ab+625b^2$ | 22. $x^2+11x+30$ |
| 9. $x^2+34x+289$ | 16. $x^2+11x+24$ | 23. $9a^2b^2+30abc+25c^2$ |
| 10. a^2+5a+6 | 17. $a^2+9ab+20b^2$ | 24. $x^2-8x+12$ |
| 11. x^2+2x+1 | 18. y^4-20y^2+100 | 25. $16a^2b^4-8ab^2c+b^2c^2$ |
| 12. x^2-7x+6 | 19. $a^2b^2-11ab+30$ | 26. x^2+6x-7 |
| 13. x^2+3x+2 | 20. $x^2-7x+12$ | 27. $z^2+11z-12$ |

33. Quadrado e raiz quadrada de um monômio. Para calcular o quadrado de um monômio, é bastante multiplicá-lo por si mesmo.

$$\begin{aligned}(5a^3b)^2 &= 5a^3b \times 5a^3b = 25a^6b^2 \\ (7a^4b^5)^2 &= 7a^4b^5 \times 7a^4b^5 = 49a^8b^{10} \\ (-3x^5)^2 &= (-3x^5)(-3x^5) = 9x^{10} \\ (-5ab^2)^2 &= (-5ab^2)(-5ab^2) = 25a^2b^4\end{aligned}$$

Regra. Para calcular o quadrado ou a segunda potência de um monômio, eleva-se o coeficiente ao quadrado e multiplicam-se os expoentes por 2. O monômio dado pode ser positivo ou negativo; seu quadrado é sempre positivo. (*)

De acôrdo com a regra para elevar um monômio ao quadrado, resulta que um monômio qualquer, para ser quadrado perfeito, deve preencher as três condições seguintes:

(*) Quando dizemos que um monômio é positivo ou negativo, estamos nos referindo ao sinal + ou - que o precede, e não ao sinal do resultado que se obtém, ao calcular o valor numérico do mesmo monômio. Um monômio positivo pode tornar-se negativo, ou mesmo nulo, quando se substituem as letras que nele entram por determinados valores numéricos.

- a) Deve ser positivo.
- b) O coeficiente deve ser quadrado perfeito.
- c) Os expoentes devem ser divisíveis por 2.

Portanto, o monômio $-25a^4b^2$ não é quadrado perfeito porque não há monômio positivo ou negativo, cujo quadrado seja um monômio negativo; o monômio $+20a^4b^2$ também não é quadrado perfeito porque o coeficiente 20 não é um quadrado perfeito; o monômio $+25a^4b^3$ também não é quadrado perfeito porque o expoente do fator b não é divisível por 2.

Entretanto, o monômio $+25a^4b^2$ é quadrado perfeito, porque preenche as três condições indicadas; sua raiz quadrada é $5a^2b$ porque $5a^2b \times 5a^2b = 25a^4b^2$.

Observação. O monômio $+25a^4b^2$ tem duas raízes quadradas, a saber, $+5a^2b$ e $-5a^2b$. Com efeito,
 $(+5a^2b)(5a^2b) = 25a^4b^2$.. $(-5a^2b)(-5a^2b) = 25a^4b^2$

Em rigor, deveríamos dizer ou escrever: $\sqrt{25a^4b^2} = \pm 5a^2b$.

Até nova ordem, porém, consideraremos somente a raiz positiva.

Regra. Para extrair a raiz quadrada de um monômio, extrai-se a raiz quadrada do coeficiente e dividem-se os expoentes por 2.

Esta regra resulta espontaneamente da elevação de um monômio ao quadrado. Por exemplo,

$$\sqrt{9a^2x^6} = 3ax^3 \quad \sqrt{36m^4n^6} = 6m^2n^3 \quad \sqrt{49a^4m^6x^8} = 7a^2m^3x^4$$

34. Cubo e raiz cúbica de um monômio. Para calcular o cubo ou a terceira potência de um monômio, é bastante tomá-lo três vezes como fator.

$$\begin{aligned}(7a^4b^2c)^3 &= 7a^4b^2c \times 7a^4b^2c \times 7a^4b^2c = 343a^{12}b^6c^3 \\ (-6am^4x^5)^3 &= (-6am^4x^5)(-6am^4x^5)(-6am^4x^5) = -216a^3m^{12}x^{15}\end{aligned}$$

Regra. Para calcular o cubo ou a terceira potência de um monômio, eleva-se o coeficiente ao cubo ou à terceira potência e multiplicam-se os expoentes por 3. Se o monômio dado é positivo, sua terceira potência é positiva; se é negativo, sua terceira potência é negativa.

De acôrdo com a regra para elevar um monômio à terceira potência, resulta que um monômio qualquer, para ser um cubo perfeito ou uma terceira potência exata, deve preencher as duas condições seguintes:

- a) O coeficiente deve ser um cubo perfeito.
 b) Os expoentes devem ser divisíveis por 3.

Quanto ao sinal, pode ser positivo ou negativo.

Portanto, o monômio $10a^3b^6$ não é um cubo perfeito porque o coeficiente 10 não é um cubo perfeito; o monômio $27a^3b^7$ também não é um cubo perfeito porque o expoente do fator b não é divisível por 3.

Entretanto, o monômio $27a^3b^6$ é um cubo perfeito, porque preenche as condições indicadas; sua raiz cúbica é $3ab^2$ porque $3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 = 27a^3b^6$.

Regra. Para extrair a raiz cúbica de um monômio, extrai-se a raiz cúbica do coeficiente, e dividem-se os expoentes por 3.

Esta regra resulta espontaneamente da elevação de um monômio à terceira potência. Por exemplo,

$$\sqrt[3]{125a^6b^{12}} = 5a^2b^4 \quad \sqrt[3]{-216m^6n^{12}x^{15}} = -6m^2n^4x^5$$

35. Quarta potência e raiz quarta de um monômio. Para calcular a quarta potência de um monômio, é bastante tomá-lo quatro vezes como fator.

$$(3a^4b^2c)^4 = 3a^4b^2c \times 3a^4b^2c \times 3a^4b^2c \times 3a^4b^2c = 81a^{16}b^8c^4$$

$$(-5m^2x^5)^4 = (-5m^2x^5)(-5m^2x^5)(-5m^2x^5)(-5m^2x^5) = 625m^8x^{20}$$

Regra. Para calcular a quarta potência de um monômio, eleva-se o coeficiente à quarta potência e multiplicam-se os expoentes por 4. O monômio dado pode ser positivo ou negativo; sua quarta potência é sempre positiva.

De acordo com a regra para elevar um monômio à quarta potência, resulta que um monômio qualquer, para ser uma quarta potência exata, deve preencher as três condições seguintes:

- a) Deve ser positivo.
 b) O coeficiente deve ser uma quarta potência exata.
 c) Os expoentes devem ser divisíveis por 4.

Portanto, o monômio $-81a^4b^8$ não é uma quarta potência exata, porque não há monômio positivo ou negativo cuja quarta potência seja um monômio negativo; o monômio $+50a^4b^8$ também não é uma quarta potência exata porque o coeficiente 50 não é uma quarta potência exata; o monômio $+81a^4b^9$ também

não é uma quarta potência exata porque o expoente do fator b não é divisível por 4.

Entretanto, o monômio $+81a^4b^8$ é uma quarta potência exata, porque preenche as três condições indicadas; sua raiz quarta é $3ab^2$ porque $3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 = 81a^4b^8$.

Regra. Para extrair a raiz quarta de um monômio, extrai-se a raiz quarta do coeficiente e dividem-se os expoentes por 4.

Esta regra resulta espontaneamente da elevação de um monômio à quarta potência. Por exemplo,

$$\sqrt[4]{16a^{12}b^{20}} = 2a^3b^5 \quad \sqrt[4]{625m^8n^{28}} = 5m^2n^7$$

36. Potências e raízes dos monômios. O que dissemos nos três parágrafos anteriores é bastante para compreender como se eleva um monômio dado a uma potência qualquer, e como se extrai uma raiz de qualquer grau de um monômio dado. E é necessário não esquecer que:

- a) Uma potência qualquer de um monômio é um monômio.
 b) Uma raiz de qualquer grau de um monômio é um monômio.

37. Divisão de monômios. Já aprendemos a multiplicar dois monômios. (§ 29) Por exemplo,

$$7a^3b^4 \times 5a^2b^6 = 35a^5b^{10}$$

Consideremos agora a igualdade seguinte:

$$M \times 8a^3b^2c^4 = 40a^5b^7c^{10}$$

Nesta igualdade, o monômio $40a^5b^7c^{10}$ é o produto de dois monômios, um dos quais é conhecido: é o monômio $8a^3b^2c^4$. Como calcular o monômio M ? Evidentemente, é necessário desfazer o que fizemos na multiplicação, isto é, dividir o monômio $40a^5b^7c^{10}$ pelo monômio $8a^3b^2c^4$. Ora, de acordo com a regra para multiplicar um monômio por outro, o valor do monômio M é $5a^2b^5c^6$. Portanto,

$$40a^5b^7c^{10} : 8a^3b^2c^4 = 5a^2b^5c^6$$

Regra. Para dividir um monômio por outro, divide-se o coeficiente do primeiro pelo coeficiente do segundo e ter-se-á assim o coeficiente do quociente; ao lado deste coeficiente escrevem-se as letras do

dividendo, dando como expoente, a cada uma delas, a diferença entre seu expoente no dividendo e no divisor. Quanto ao sinal do quociente, será ele determinado pela regra dos sinais. (§ 19)

Exercícios orais

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 1. $12a^3 : 4a^2$ | 8. $(-64a^5m^8) : 8a^4m^2$ | 15. $m^{3a} : m^{2a}$ |
| 2. $24x^7 : 8x^2$ | 9. $(-24a^3x^4) : (-8ax)$ | 16. $a^{5m} : a^{2m}$ |
| 3. $a^4b^2 : ab$ | 10. $14a^3b^5 : (-2ab^2)$ | 17. $36a^{5m} : 4a^{2n}$ |
| 4. $12a^3b^6 : (-4a^2b)$ | 11. $36m^7n^7 : 9m^5n^2$ | 18. $x^{a+1} : x^{a-1}$ |
| 5. $(-a^{14}) : a^{11}$ | 12. $(-7a^3) : (-a^2)$ | 19. $x^{3a-5} : x^{2a-5}$ |
| 6. $8a^3b^3 : (-4a^2b)$ | 13. $a^m : a^n$ | 20. $a^{4m-2} : a^{3m-4}$ |
| 7. $5a^7x^5 : 5a^6x^3$ | 14. $12x^a : 3x^b$ | 21. $a^{m+n} : a^{m-n}$ |

38. O expoente zero. Dividindo a^5 por a^5 resulta a^{5-5} , isto é, a^0 . (§ 37) O que significa a^0 ? Tomar a como fator zero vezes? Evidentemente, isto não tem sentido. Estamos diante de um resultado singular, como se diz em Álgebra, e é necessário interpretar, isto é, explicar este resultado, descobrir a sua significação. Ora, dividindo um número qualquer por si mesmo, o quociente é a unidade: $7 \div 7 = 1$, $8 \div 8 = 1$, etc.. Portanto, $a^5 : a^5 = 1$.

E estabeleceremos, então, por convenção que, sendo a diferente de zero, a expressão a^0 é igual à unidade.

Nestas condições, $7^0 = 1$, $x^0 = 1$, $a^0b^0c^0 = 1$, $(abc)^0 = 1$, $(-5a^3b^2)^0 = 1$, $(a-b)^0 = 1$, $(a^3 + a^2 + a + 1)^0 = 1$, etc..

Dividindo $24a^3b^8c^7d$ por $3a^3b^5c^2d$, o quociente é $8a^0b^3c^5d^0$.
 $24a^3b^8c^7d : 3a^3b^5c^2d = 8a^0b^3c^5d^0$

Já vimos, porém, que $a^0 = 1$ e $d^0 = 1$. Logo,

$$24a^3b^8c^7d : 3a^3b^5c^2d = 8 \times 1 \times b^3 \times c^5 \times 1 = 8b^3c^5$$

Portanto, quando uma letra tem o mesmo expoente no dividendo e no divisor, ela não aparece no quociente.

Exercícios orais

- | | | |
|--------------------|--------------------------|--------------------|
| 1. $a^4b : a^3b$ | 6. $15m^4nr : 3mn$ | 11. $x^5 : (-x^4)$ |
| 2. $(-a^7) : a^7$ | 7. $36x^3y^3z : 9x^3y^3$ | 12. $x^8 : (-x^8)$ |
| 3. $x^5 : x^5$ | 8. $x^5 : (-x^5)$ | 13. $(-m^4) : m^4$ |
| 4. $3a^2 : (-a^2)$ | 9. $x^4 : x^3$ | 14. $r^7 : (-r^7)$ |
| 5. $a^4b^3c : abc$ | 10. $x^4 : x^4$ | 15. $a^2b : (-ab)$ |

39. O expoente negativo. Dividindo a^2 por a^5 resulta a^{2-5} , isto é, a^{-3} . (§ 37) O que significa a^{-3} ? Tomar a como fator menos três vezes? Evidentemente, isto não tem sentido. Estamos diante de outro resultado singular, que é necessário interpretar.

$$\text{Ora: } a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a \times a \times a} = \frac{1}{a^3}$$

$$\text{Portanto, } a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

E convencionaremos que:

Uma potência com expoente negativo, de um número a diferente de zero, é igual a uma fração cujo numerador é a unidade, e cujo denominador é a mesma potência, com o mesmo expoente, porém positivo.

Uma vez interpretado o expoente negativo, chegamos facilmente às duas conclusões seguintes:

I. Quando um monômio contém uma letra com expoente negativo, devemos colocá-la no denominador, trocando, porém, o sinal do seu expoente. Com efeito,

$$3a^{-5} = 3 \times \frac{1}{a^5} = \frac{3}{a^5} \quad 5a^3b^{-3} = 5 \times a^3 \times \frac{1}{b^3} = \frac{5a^3}{b^3}$$

$$2^{-3}a^4b^{-4} = \frac{1}{2^3} \times a^4 \times \frac{1}{b^4} = \frac{a^4}{8b^4}$$

II. Quando um monômio contém uma letra com expoente negativo no denominador, devemos colocá-la no numerador, trocando, porém, o sinal do seu expoente. Com efeito,

$$\frac{a^5}{b^{-5}} = a^5 : b^{-5} = a^5 : \frac{1}{b^5} = a^5 \times \frac{b^5}{1} = a^5b^5$$

$$\frac{a^{-3}}{2b^{-5}} = a^{-3} : 2b^{-5} = \frac{1}{a^3} : \frac{2}{b^5} = \frac{1}{a^3} \times \frac{b^5}{2} = \frac{b^5}{2a^3}$$

Exercícios. Série XV

Fazer desaparecer os expoentes negativos nas expressões algébricas seguintes:

$$1. 5a^3b^{-3} + 7x^{-5}a^4 - 4^{-2}x^8 - 3a^{-1}b^{-1}$$

$$2. m^4n^{-4} - m^{-5}n^5 + 4m^3n^{-3} - 3m^2n^2$$

$$3. 2^{-1}ab - 5^{-1}bc + 7^{-1}ac - 3a^{-2}b^2c^{-2}$$

$$4. \frac{3a}{m^{-2}} + \frac{5a^{-3}}{m^2} - \frac{3m^{-3}}{5^{-1}a^{-3}}$$

5. $3a^2b^0 + 5a^0b^2 + \frac{8c}{a^0b^0}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$.

6. $\frac{5a^3}{b^2c^0} - \frac{4b^0}{a^0c^2} + \frac{2ab}{c^2d} - \frac{8c^0d^2}{a^2b^0} + \frac{5}{36}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$, $d = 1$.

7. $5a^{-2} + 3b^{-1} + 4c^{-2} + \frac{11d^0}{20}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 10$.

8. $4^{-1}abc - 2^{-2}a^2b^{-2}c^0 + 8^{-1}a^{-2}b^2c^2 + 16^{-1}a^0b^0c^0$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$.

9. $3a^{-2}bc^{-1} - 12a^2b^{-2}c + 9a^0b^2c^{-1} - 18^{-1}abc + \frac{7}{9}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$.

10. $\frac{a^0}{b^0} + \frac{a^{-1}}{b^{-1}} + \frac{a^{-2}}{b^{-2}} + \frac{a^{-3}}{b^{-3}} + \frac{a^{-4}}{b^{-4}} + \frac{a^{-5}}{b^{-5}}$. Calcular o valor desta expressão, para $a = 10$ e $b = 20$.

40. O expoente fracionário. Já aprendemos que (§§ 33 a 36):

$\sqrt{a^6} = a^3$	$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$	$\sqrt[4]{a^{20}} = a^5$	$\sqrt[5]{a^{30}} = a^6$
$\sqrt{a^8} = a^4$	$\sqrt[3]{a^{18}} = a^6$	$\sqrt[4]{a^{28}} = a^7$	$\sqrt[5]{a^{20}} = a^4$
$\sqrt{a^{10}} = a^5$	$\sqrt[3]{a^{21}} = a^7$	$\sqrt[4]{a^{32}} = a^8$	$\sqrt[5]{a^{15}} = a^3$

Podemos resumir as regras conhecidas na seguinte

Regra. A raiz com índice n , de a^m , é a elevado a uma potência cujo expoente é $\frac{m}{n}$.

De acordo com esta regra, teremos:

$$\sqrt{a^{12}} = a^6 \quad \sqrt[3]{a^6} = a^2 \quad \sqrt[4]{a^{12}} = a^3 \quad \sqrt[8]{a^5} = a^{\frac{5}{8}} \quad (?)$$

Estamos diante de outro resultado singular. O que significa $a^{\frac{5}{3}}$? Tomar a como fator cinco terços de uma vez? Evidentemente, isto não tem sentido, e é necessário interpretar este novo resultado singular. Mas a interpretação já está feita nas linhas acima; o que dissemos é bastante para compreender que:

$$\begin{array}{ccc} 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} & ; & 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} & ; & 7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} \\ a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5} & ; & a^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{a^4} & ; & a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{a^3} \end{array}$$

Fica então estabelecido que:

Um número com expoente fracionário é a mesma coisa que um radical cujo radicando é o número dado, cujo expoente é o numerador e cujo índice é o denominador.

41. As frações algébricas. Nem sempre é possível dividir um monômio por outro. O monômio $24a^5b^2$ não é divisível pelo monômio $8a^3b^5$ porque o expoente de b no divisor é maior do que o expoente desta mesma letra no dividendo. Verdade é que poderíamos escrever (§ 39):

$$24a^5b^2 : 8a^3b^5 = 3a^2b^{-3}$$

Mas, na divisão algébrica, não devemos operar com expoentes negativos, como veremos mais tarde. (§ 44)

Igualmente $24a^3b^4$ não é divisível por $8a^2b^2c$ porque há no divisor uma letra que não existe no dividendo. Na verdade poderíamos escrever:

$$24a^3b^4c^0 : 8a^2b^2c = 3ab^2c^{-1}$$

Mas apareceria então no quociente uma letra com expoente negativo. Em resumo, a divisão de um monômio por outro é impossível quando:

a) O expoente de uma letra no divisor é maior que o expoente da mesma letra no dividendo.

b) Há no divisor uma letra que não existe no dividendo.

Quando um monômio não é divisível por outro, representaremos o quociente sob a forma de fração (algébrica) como fizemos em Aritmética. (E.M.P.V. § 143)

$$3a : 5b = \frac{3a}{5b} \quad 7a^2b : 10ab^2 = \frac{7a^2b}{10ab^2} \quad 12a^3b : 4a^2c = \frac{12a^3b}{4a^2c}$$

E aparecem assim as frações algébricas.

A fração algébrica é o quociente indicado da divisão de um monômio por outro. (*) Os dois monômios que a constituem são chamados *têrmos*; o que fica sobre o traço horizontal é o *numerador* e o que fica em baixo do mesmo traço é o *denominador*.

Todas as transformações e operações relativas às frações aritméticas se aplicam, sem restrições, às frações algébricas, não esquecendo, porém, que os *têrmos* de uma fração algébrica são expressões algébricas.

Observação. Quando a divisão de um monômio por outro é impossível, indica-se a divisão e simplifica-se a fração resultante.

Exercício. Dividir $12am^5n^4p^3q^2$ por $4m^2n^3p^4q^5$

$$12am^5n^4p^3q^2 : 4m^2n^3p^4q^5 = \frac{12am^5n^4p^3q^2}{4m^2n^3p^4q^5} = \frac{3am^3n}{pq^3}$$

Exercícios orais

Simplificar as seguintes frações:

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\frac{3ab}{bc}$ | 5. $\frac{18a^2}{30}$ | 9. $\frac{x^2y^2}{x^3y^3}$ | 13. $\frac{3x^5}{6x^6}$ |
| 2. $\frac{4a}{8a^2}$ | 6. $\frac{m}{m^2n}$ | 10. $\frac{a^2m}{am^2}$ | 14. $\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^3c^2}$ |
| 3. $\frac{ab}{ax}$ | 7. $\frac{3x}{6y}$ | 11. $\frac{4a^3m^2}{7a^4m^2}$ | 15. $\frac{2abc}{abc}$ |
| 4. $\frac{3xy}{6xy}$ | 8. $\frac{5a}{5a}$ | 12. $\frac{10abd}{5abc}$ | 16. $\frac{m^4n}{mn^4}$ |

Exercícios. Série XVI

Efetuar as seguintes operações:

- | | | |
|--------------------------------------|--|----------------------------------|
| 1. $\frac{3}{a} + \frac{5}{a}$ | 3. $\frac{5a^2}{2a} + \frac{3a^2}{2a}$ | 5. $\frac{2a}{b} + \frac{3a}{b}$ |
| 2. $\frac{3}{a} \times \frac{2a}{5}$ | 4. $\frac{a}{b} : \frac{b}{a}$ | 6. $\frac{a}{b} \times (-1)$ |

(*) Completaremos adiante (§47) esta definição.

- | | | |
|--|---|-------------------------------------|
| 7. $\frac{7a}{3} - \frac{m}{3}$ | 13. $\frac{3a}{4b} \times \frac{5b}{6a}$ | 19. $\frac{3mn}{m} - \frac{5mn}{m}$ |
| 8. $4a^2 \times \frac{5}{a^3}$ | 14. $2m \times \frac{3}{m^2}$ | 20. $6ab : \frac{3ab}{5}$ |
| 9. $\frac{x^3}{m} + \frac{x^3}{m}$ | 15. $\frac{2a}{m} + \frac{3b}{m}$ | 21. $\frac{2m}{n} \times (-1)$ |
| 10. $\frac{3x}{y} \times (-1)$ | 16. $\frac{5mn}{6ab} : mn$ | 22. $\frac{3}{ax} \times 2x$ |
| 11. $\frac{5x^2}{a} - \frac{3x^2}{a}$ | 17. $\frac{8m^3}{5m} - \frac{3m^3}{5m}$ | 23. $\frac{m}{a} - \frac{n}{b}$ |
| 12. $\frac{2x}{3} : \frac{3x}{2}$ | 18. $\frac{2}{a} + \frac{3}{x}$ | 24. $\frac{a}{5} + \frac{a}{3}$ |
| 25. $12a^5b^7 : 30a^3b^8 =$ | 28. $(-51abdy^2) : 3a^2bdy =$ | |
| 26. $6x^3y^2 : 15x^2y^3z =$ | 29. $121m^4nx : (-44m^3nxy) =$ | |
| 27. $91a^2mx^2 : 117am^2x =$ | 30. $(-39a^4bc^4d) : (-52a^3b^2c^3d^2) =$ | |
| 31. $\frac{3a^5b}{5} : \frac{9a^4b^2}{10} =$ | 34. $\frac{5xy^3z}{11} : \frac{25x^3yz^3}{33} =$ | |
| 32. $\frac{5m^3n}{6} : \frac{10mn^3}{12} =$ | 35. $\left(\frac{5a^3b}{4}\right)^2 : \frac{10a^5b^3}{12} =$ | |
| 33. $\frac{7a^3b^2c^4}{3} : \frac{14ab^3c}{9} =$ | 36. $\left(\frac{2abc}{3}\right)^3 : \frac{10a^2b^4c^4}{9} =$ | |

42. O sinal nas frações algébricas. Em uma fração algébrica temos três sinais a considerar:

a) O sinal do numerador, isto é, o sinal que qualifica o numerador ou dividendo.

b) O sinal do denominador, isto é, o sinal que qualifica o denominador ou divisor.

c) O sinal que precede a fração, isto é, o sinal que qualifica a fração ou quociente.

Vejamos o que se pode fazer com estes três sinais.

Observemos que:

$$+\frac{+15}{+5} = +(+3) = +3$$

$$+\frac{-15}{-5} = +(+3) = +3$$

$$-\frac{+15}{-5} = -(-3) = +3$$

$$-\frac{-15}{+5} = -(-3) = +3$$

Regra. Dada uma fração algébrica, e considerando os três sinais que ela contém, podemos, se nos convier, mudar dois sinais quaisquer, sem que o valor da fração se altere.

De um modo geral,

$$+\frac{+m}{+n} = +\frac{-m}{-n} = -\frac{+m}{-n} = -\frac{-m}{+n}$$

A regra acima também pode ser enunciada nos seguintes termos:

Dada uma fração algébrica, podemos multiplicar um de seus termos por -1 (trocar o sinal de um de seus termos) contanto que se mude o sinal positivo ou negativo que precede a fração.

Exercícios para o quadro-negro

Escrever de quatro modos diferentes cada uma das seguintes frações:

1. $\frac{7}{10}$

3. $-\frac{5}{9}$

5. $\frac{2}{-5}$

7. $\frac{-3}{8}$

9. $\frac{-2}{-9}$

2. $-\frac{m}{n}$

4. $\frac{r}{s}$

6. $\frac{-m}{n}$

8. $\frac{m}{-n}$

10. $\frac{-a}{-x}$

43. Grau de uma expressão algébrica. Consideremos alguns monômios racionais e inteiros, por exemplo, $6a^3b$, $10abc$, $12x$ e $30ab^2cd^2$. Lembrando que $abcde$ significa $a \times b \times c \times d \times e$, teremos:

$$6a^3b = 6 \times a \times a \times a \times b$$

$$10abc = 10 \times a \times b \times c$$

$$12x = 12 \times x$$

$$30ab^2cd^2 = 30 \times a \times b \times b \times c \times d \times d$$

O primeiro monômio é constituído por cinco fatores dos quais um é numérico e quatro são literais; diremos então que o monômio $6a^3b$ é do quarto grau. O monômio $10abc$, tendo três fatores literais, é do terceiro grau; o monômio $12x$ é do primeiro grau e o monômio $30ab^2cd^2$ é do sexto grau.

O grau de um monômio racional e inteiro é a soma dos expoentes das letras que entram neste monômio.

Observação. Se o monômio é constituído apenas por um número, diremos que este monômio é do grau zero. Por exemplo, o monômio 5 é do grau zero. Com efeito, $5 = 5a^0 = 5a^0m^0 = 5a^0m^0x^0$, etc., e a soma dos expoentes das letras de qualquer um destes monômios é zero.

Consideremos os seguintes monômios racionais e fracionários:

$$\frac{a^5b^7}{a^2b^3} \quad \frac{5a^3m^4}{a^2m} \quad \frac{3a^5x^5}{a^2x^2}$$

Simplificando estes monômios resulta:

$$\begin{array}{l} a^5b^7 \div a^2b^3 = a^3b^4 \\ 5a^3m^4 \div a^2m = 5am^3 \\ 3a^5x^5 \div a^2x^2 = 3a^3x^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{E diremos que o primeiro monômio} \\ \text{é do 7.º grau, o segundo é do 4.º grau} \\ \text{e o terceiro é do sexto grau.} \end{array}$$

O grau de um monômio racional e fracionário é a diferença entre o grau do numerador e o grau do denominador.

Observação. Consideremos o monômio $\frac{a^4b}{mx}$. Desta vez não é possível simplificá-lo e transformá-lo em um monômio inteiro. Entretanto, sendo o numerador do 5.º grau e o denominador do 2.º grau, diremos, ainda neste caso, que este monômio é do 3.º grau.

3 Consideremos o monômio irracional $\sqrt[3]{a^3b^6c^9}$. Já sabemos que $\sqrt[3]{a^3b^6c^9} = ab^2c^3$. Observemos que o radicando é do 18.º grau, o índice da raiz é 3 e o monômio ab^2c^3 é do 6.º grau. E diremos que:

O grau de um monômio irracional é igual ao grau do radicando, dividido pelo índice da raiz.

Portanto, $\sqrt[3]{a^6}$ é um monômio do 3.º grau, $\sqrt[3]{a^{15}}$ é um monômio do 5.º grau, etc..

Observação. Não é possível transformar $\sqrt[3]{a^3b^5}$ em um monômio racional; entretanto, diremos por analogia que este monômio é do 4.º grau.

O grau de uma expressão algébrica qualquer é o grau do termo de mais elevado grau.

Consideremos os polinômios seguintes:

$$a^5 - a^4b^3 + 7a^3b^4 - b^8 \quad \frac{a^3b}{m} - \sqrt{a^2b^4} + 4a^2b^3$$

O primeiro polinômio é do 8.º grau porque seu termo de grau mais elevado, isto é, o termo b^8 , é do 8.º grau.

O segundo polinômio é do 5.º grau, porque seu termo de grau mais elevado, isto é, o termo $4a^2b^3$, é do 5.º grau.

Às vezes, pede-se o grau de um polinômio em relação a uma determinada letra do mesmo polinômio. Nestas condições, responderemos que o primeiro polinômio é do 5.º grau em relação à letra a , e do 8.º grau em relação à letra b ; o segundo polinômio é do 3.º grau em relação à letra a ou à letra b , e do grau -1 em relação à letra m .

Um polinômio é *homogêneo* quando todos os seus termos são do mesmo grau; é *não homogêneo* no caso contrário. Por exemplo, considerando os polinômios

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad x^3 - x^2 + x - 1$$

diremos que ambos são do 3.º grau, sendo que o primeiro é *homogêneo* e o segundo é *não homogêneo*.

44. Divisão algébrica. A divisão algébrica é a operação que tem por fim, dadas duas expressões algébricas racionais e inteiras, chamadas respectivamente *dividendo* e *divisor*, formar uma terceira expressão algébrica, também racional e inteira, chamada *quociente*, cujo valor numérico seja sempre igual ao quociente dos valores numéricos do dividendo e do divisor, contanto que as mesmas letras sejam substituídas pelos mesmos números (ou valores) aliás quaisquer, nos três polinômios.

Representando o dividendo, o divisor e o quociente respectivamente por A , B , Q , teremos:

$$A \div B = Q \quad \therefore \quad A = B \times Q$$

A segunda igualdade significa que o dividendo é um produto constituído por dois fatores: o divisor e o quociente. Podemos então dizer que:

A divisão algébrica é a operação que tem por fim, conhecendo o produto de duas expressões algébricas racionais e inteiras, e uma destas expressões, calcular a outra.

Na divisão algébrica há três casos a considerar:

- Divisão de um monômio por um monômio.
- Divisão de um polinômio por um monômio.
- Divisão de um polinômio por um polinômio.

O primeiro caso já foi estudado. Vimos como se divide um monômio por um monômio (§37); vimos também em que casos a divisão é impossível e como, da impossibilidade desta divisão, resultam os expoentes nulos ou negativos e as frações algébricas.

E agora podemos acrescentar que a divisão é impossível quando não existe o terceiro monômio racional e inteiro exigido pela definição da divisão algébrica.

E' necessário insistir sobre o seguinte: a divisão de um monômio por outro é considerada impossível quando:

- o divisor contém letras que não existem no dividendo.
- o expoente de uma letra no divisor é mais elevado que o expoente desta mesma letra no dividendo.

Pouco importa que o coeficiente do dividendo não seja divisível pelo coeficiente do divisor; isto não é um caso de impossibilidade na divisão de um monômio por outro. Assim é que $3a^4b^2$ é divisível, sob o ponto de vista algébrico, por $5a^3b$, sendo o quociente igual a $\frac{3ab}{5}$. Embora o coeficiente do quociente, isto é, $\frac{3}{5}$, seja fracionário, o quociente $\frac{3ab}{5}$ é, algébricamente, uma expressão inteira.

Observação. Repetir os exercícios orais dos §§ 37 e 38.

45. Divisão de um polinômio por um monômio. Lembrando que:

$$(a + b + c) \times l = al + bl + cl$$

torna-se evidente que:

$$(al + bl + cl) : l = a + b + c, \text{ isto é,}$$

Regra. Para dividir um polinômio por um monômio, divide-se cada termo do polinômio, pelo monômio, e somam-se os quocientes.

Na divisão de um polinômio por um monômio, é inútil o emprêgo da chave ou caixa da divisão, isto é, do sinal $\boxed{}$.

A operação se efetua como está indicado nos exemplos que se seguem:

$$1. (15a^3b - 10a^2b^2 + 20ab^3) : 5ab = 3a^2 - 2ab + 4b^2$$

$$2. (3x^3 - 5x^2 + 7x) : (-2x) = -\frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} - \frac{7}{2}$$

$$3. (a^3x^2 - a^4x^3 + a^5x^4y) : a^2x^2 = a - a^2x + a^3x^2y$$

$$4. (6a^2b^2 - 5a^3b^3 + 12a^4b^4) : (-6a^2b^2) = -1 + \frac{5ab}{6} - 2a^2b^2$$

$$5. (a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4) : ab = a^2 - ab + b^2 - \frac{b^4}{ab} \\ = a^2 - ab + b^2 - \frac{b^3}{a}$$

$$6. (a^3 - a^2 + a - 5) : am = \frac{a^3}{am} - \frac{a^2}{am} + \frac{a}{am} - \frac{5}{am} \\ = \frac{a^2}{m} - \frac{a}{m} + \frac{1}{m} - \frac{5}{am}$$

Nos dois últimos exemplos, os quocientes são polinômios racionais, porém fracionários; logo, as divisões correspondentes são impossíveis. (§44) A divisão de um polinômio por um monômio é impossível quando um dos termos do polinômio não é divisível pelo monômio; neste caso, indica-se a divisão e, em seguida, simplifica-se a fração resultante.

Exercícios. Série XVII

1. $(6a^3 - 4a^2 + 2a) : 2a$
2. $(a^3 - 5a^2b + 3ab^2 - b^3) : ab$
3. $(x^3y^3 - x^2y^2 + xy) : xy$
4. $(6a^4 - 12a^5 + 18a^6) : (-3a^4)$
5. $[a^3(x-y) - a^2(x-y) + a(x-y) - (x-y)] : (x-y)$
6. $(-24a^5x + 30a^4x^2 - 36a^3x^3 + 42a^2x^4 - 48ax^5) : (-6ax)$
7. $(3a^4b - 5a^3b^2 + 6a^2b^3 - 7ab^4) : 8ab$
8. $(-4a^4b + 6a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4) : (-2a^3b^2)$
9. $(xy^5 - x^2y^4 + x^3y^3 - x^4y^2 + x^5y) : x^2y^2$
10. $\left(\frac{3a^3b}{4} - \frac{5a^2b^2}{6} + \frac{2ab^3}{5}\right) : \frac{10ab}{11}$
11. $(5a^m - 10a^{m-1} + 15a^{m-2} + 20a^{m-3}) : 5a^{m-5}$
12. $(a^{2m+1} - a^{2m} + a^{2m-1} - a^{2m-2}) : a^{m-3}$

46. Divisão de um polinômio por um polinômio. (*)
Para dividir um polinômio por um polinômio, procede-se de acordo com a seguinte

(*) Este assunto não figura no atual programa de Matemática; podemos, pois, dispensá-lo, se assim o exigir a carência de tempo.

$1. \begin{array}{r} x^6 - 4x^4a^2 + 4x^2a^4 - a^6 \\ -x^6 + x^4a^2 \\ \hline (resto) -3x^4a^2 + 4x^2a^4 - a^6 \\ +3x^4a^2 - 3x^2a^4 \\ \hline (resto) +x^2a^4 - a^6 \\ -x^2a^4 + a^6 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 - a^2 \\ \hline x^4 - 3x^2a^2 + a^4 \\ \hline \end{array}$	<p>Regra. Ordenam-se os dois polinômios de acordo com as potências decrescentes de uma mesma letra, e no mesmo sentido. Em seguida, divide-se o primeiro termo do dividendo, x^6, pelo primeiro termo do divisor, x^2, obtendo-</p>
--	--	--

se assim o primeiro termo do quociente, x^4 . Multiplica-se o primeiro termo do quociente por todo o divisor, e subtrai-se o produto de todo o dividendo. Divide-se o primeiro termo do resto, $-3x^4a^2$, pelo primeiro termo do divisor, x^2 , obtendo-se, assim, o segundo termo do quociente, $-3x^2a^2$. Multiplica-se o segundo termo do quociente por todo o divisor, e subtrai-se o produto de todo o primeiro resto. Divide-se o primeiro termo do segundo resto, x^2a^4 , pelo primeiro termo do divisor, x^2 , obtendo-se assim o terceiro termo do quociente, a^4 . Multiplica-se o terceiro termo do quociente por todo o divisor, e subtrai-se o produto de todo o segundo resto. E assim por diante.

$2. \begin{array}{r} x^3 - y^3 \\ -x^3 + x^2y \\ \hline (resto) +x^2y - y^3 \\ -x^2y + xy^2 \\ \hline (resto) +xy^2 - y^3 \\ -xy^2 + y^3 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x - y \\ \hline x^2 + xy + y^2 \end{array}$
---	---

Neste segundo exemplo, os dois polinômios estão ordenados de acordo com as potências decrescentes de x . Esta ordenação deve ser conservada durante toda a operação. Ao efetuar a primeira subtração, ficaríamos embaraçados se, em lugar de $x^2y - y^3$ (resto), escrevêssemos $-y^3 + x^2y$; como dividir y^3 por x ? É indispensável, pois, ao escrever os restos, ter o cuidado de ordená-los de acordo com a letra ordenatriz do dividendo e do divisor, e no mesmo sentido.

$$\begin{array}{r}
 3. \quad \begin{array}{r} a^3 - 3abc + b^3 + c^3 \\ - a^3 - a^2b - a^2c \\ \hline - a^2b - a^2c - 3abc + b^3 + c^3 \\ + a^2b + ab^2 + abc \\ \hline - a^2c + ab^2 - 2abc + b^3 + c^3 \\ + a^2c + abc + ac^2 \\ \hline + ab^2 - abc + ac^2 + b^3 + c^3 \\ - ab^2 - b^3 - b^2c \\ \hline - abc + ac^2 - b^2c + c^3 \\ + abc + b^2c + bc^2 \\ \hline + ac^2 + bc^2 + c^3 \\ - ac^2 - bc^2 - c^3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} a + b + c \\ \hline a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2 \end{array}
 \end{array}$$

Esta divisão é, na aparência, muito difícil. Entretanto, é tão fácil como as outras. E' bastante tomar as seguintes precauções:

- ordenar o dividendo, o divisor e os restos em relação à letra a.
- se vários termos contêm a com o mesmo expoente, ordená-los em relação à letra b.
- quanto aos termos que não contêm a, ordená-los em relação à letra b.

Vamos agora demonstrar a regra geral para dividir um polinômio por um polinômio. (*)

Em primeiro lugar observemos as duas multiplicações seguintes:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r} x^3 + x^2 + x^1 + x^0 \\ x^2 + x^1 + x^0 \\ \hline x^5 + x^4 + x^3 + x^2 \\ + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 \\ + x^3 + x^2 + x^1 + x^0 \\ \hline x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x^1 + x^0 \end{array} & \begin{array}{r} x^3 + x^2 + x^1 + x^0 \\ x^1 - x^0 \\ \hline x^4 + x^3 + x^2 + x^1 \\ - x^3 - x^2 - x^1 - x^0 \\ \hline x^4 \qquad \qquad - x^0 \end{array}
 \end{array}$$

O primeiro produto deveria ter 12 termos e o segundo, 8. Entretanto, o primeiro tem 6 termos e o segundo, apenas 2.

(*) Tudo o que se segue, até o fim do parágrafo, será ensinado aos estudantes quando estes estiverem bem familiarizados com a divisão algébrica, isto é, depois de feitos todos os exercícios dados no fim deste parágrafo.

Isto acontece porque os vários produtos parciais têm termos semelhantes, que se reduzem. Mas, por maior que seja o número de termos semelhantes, o produto de um polinômio por um polinômio tem, pelo menos, dois termos. E por que?

No primeiro exemplo, os dois polinômios estão ordenados segundo as potências decrescentes da letra x. Torna-se então evidente que o primeiro termo do produto, isto é, x^5 , proveniente da multiplicação de x^3 por x^2 , não pode, em absoluto, reduzir-se com qualquer outro termo. Análogamente, o último termo do produto, isto é, x^0 , proveniente da multiplicação de x^0 por x^0 , também não pode, em absoluto, reduzir-se com qualquer outro termo.

O mesmo acontece no segundo exemplo; quase todos os termos dos produtos parciais são simétricos, dois a dois e, por isso, desaparecem do produto total. Este é constituído somente pelos dois termos que não podem desaparecer, isto é, x^4 e x^0 .

Em resumo, multiplicando dois polinômios convenientemente ordenados de acordo com as potências crescentes ou decrescentes de uma mesma letra, observa-se que:

- O produto do primeiro termo do multiplicando pelo primeiro termo do multiplicador é o primeiro termo do produto total.
- O produto do último termo do multiplicando pelo último termo do multiplicador é o último termo do produto total.
- Os demais produtos parciais podem desaparecer do produto total.
- O produto de dois polinômios pode ficar reduzido a um binômio.

Isto pôsto, vamos dividir o polinômio

$$15a^5 - 34a^4 + 62a^3 - 56a^2 + 53a - 35$$

pelo polinômio

$$5a^3 - 3a^2 + 4a - 5$$

Representando por $x+y+z+t+\dots$, o quociente da divisão, quociente este que ainda não conhecemos, podemos escrever:

E, de acordo com a regra para multiplicar um polinômio por outro, lembremos que:

$$15a^5 - 34a^4 + 62a^3 - 56a^2 + 53a - 35 = \begin{cases} (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) x + \dots \\ (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) y + \dots \\ (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) z + \dots \\ (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) t + \dots \end{cases}$$

Preparando a divisão como já foi indicado, teremos:

$$15a^5 - 34a^4 + 62a^3 - 56a^2 + 53a - 35 \mid \frac{5a^3 - 3a^2 + 4a - 5}{x + y + z + t + \dots}$$

Para determinar os valores de x , y , z , t , etc., dividamos o nosso trabalho em várias partes.

Primeira parte: determinação do termo x .

Estando os três polinômios ordenados, o primeiro termo do dividendo, $15a^5$, é o produto do primeiro termo do divisor, $5a^3$, pelo primeiro termo do quociente, x . Portanto,

$$15a^5 = 5a^3 \times x \quad \therefore \quad x = 3a^2$$

Está descoberto o primeiro termo do quociente: é $3a^2$. E fica também explicado por que é necessário dividir o primeiro termo do dividendo, pelo primeiro termo do divisor.

Multiplicando $3a^2$ por todo o divisor, e subtraindo o produto de todo o dividendo, teremos:

$$\begin{array}{r} 15a^5 - 34a^4 + 62a^3 - 56a^2 + 53a - 35 \\ - 15a^5 + 9a^4 - 12a^3 + 15a^2 \\ \hline (resto n. 1) - 25a^4 + 50a^3 - 41a^2 + 53a - 35 \end{array} \mid \frac{5a^3 - 3a^2 + 4a - 5}{3a^2 + y + z + t + \dots}$$

Se a multiplicação de um polinômio por um polinômio está bem compreendida, é fácil concluir que o resto $n.^\circ 1$ é o produto do polinômio

$$5a^3 - 3a^2 + 4a - 5$$

pelo polinômio

$$y + z + t + \dots, \text{ isto é,}$$

$$- 25a^4 + 50a^3 - 41a^2 + 53a - 35 = \begin{cases} (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) y + \\ (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) z + \\ (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) t + \dots \end{cases}$$

Segunda parte: determinação do termo y .

Vamos então dividir o polinômio

$$- 25a^4 + 50a^3 - 41a^2 + 53a - 35$$

pelo polinômio

$$5a^3 - 3a^2 + 4a - 5.$$

$$- 25a^4 + 50a^3 - 41a^2 + 53a - 35 \mid \frac{5a^3 - 3a^2 + 4a - 5}{y + z + t + \dots}$$

Estando os três polinômios ordenados, o primeiro termo do dividendo, $- 25a^4$, é o produto do primeiro termo do divisor, $5a^3$, pelo primeiro termo do quociente, y . Portanto,

$$- 25a^4 = 5a^3 \times y \quad \therefore \quad y = - 5a$$

Está descoberto o segundo termo do quociente: é $- 5a$. E fica também explicado por que é necessário dividir o primeiro termo do resto $n.^\circ 1$ pelo primeiro termo do divisor.

Multiplicando $- 5a$ por todo o divisor, e subtraindo o produto de todo o dividendo, isto é, do resto $n.^\circ 1$, teremos:

$$\begin{array}{r} - 25a^4 + 50a^3 - 41a^2 + 53a - 35 \\ + 25a^4 - 15a^3 + 20a^2 - 25a \\ \hline (resto n.^\circ 2) + 35a^3 - 21a^2 + 28a - 35 \end{array} \mid \frac{5a^3 - 3a^2 + 4a - 5}{- 5a + z + t + \dots}$$

O resto $n.^\circ 2$ é por sua vez o produto do polinômio

$$5a^3 - 3a^2 + 4a - 5$$

pelo polinômio $z + t + \dots$, isto é,

$$35a^3 - 21a^2 + 28a - 35 = \begin{cases} (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) z + \\ (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5) t + \dots \end{cases}$$

Terceira parte: determinação do termo z .

Vamos então dividir o polinômio

$$35a^3 - 21a^2 + 28a - 35$$

pelo polinômio

$$5a^3 - 3a^2 + 4a - 5.$$

$$35a^3 - 21a^2 + 28a - 35 \mid \frac{5a^3 - 3a^2 + 4a - 5}{z + t + \dots}$$

Estando os três polinômios ordenados, o primeiro termo do dividendo, $35a^3$, é o produto do primeiro termo do divisor, $5a^3$, pelo primeiro termo do quociente, z . Portanto,

$$35a^3 = 5a^3 \times z \quad \therefore \quad z = 7$$

Está descoberto o terceiro termo do quociente: é 7 . E fica também explicado por que é necessário dividir o primeiro termo do resto $n.^\circ 2$ pelo primeiro termo do divisor.

Multiplicando 7 por todo o divisor, e subtraindo o produto de todo o dividendo, isto é, do resto $n.^\circ 2$, teremos:

$$\begin{array}{r|l} 35a^3 - 21a^2 + 28a - 35 & 5a^3 - 3a^2 + 4a - 5 \\ -35a^3 + 21a^2 - 28a + 35 & 7 + t + \dots \\ \hline (\text{resto } n.^\circ 3) & 0 \end{array}$$

O resto $n.^\circ 3$ é por sua vez o produto do polinômio

$$5a^3 - 3a^2 + 4a - 5$$

pelo polinômio

$$t + \dots, \text{ isto é,}$$

$$\text{resto } n.^\circ 3 = (5a^3 - 3a^2 + 4a - 5)t + \dots$$

Mas o resto $n.^\circ 3$ é nulo; é zero. Logo, o termo t e os termos seguintes do quociente não existem, e o quociente exato da divisão do polinômio

$$15a^5 - 34a^4 + 62a^3 - 56a^2 + 53a - 35$$

pelo polinômio

$$5a^3 - 3a^2 + 4a - 5$$

é o polinômio

$$3a^2 - 5a + 7.$$

Exercícios. Série XVIII

Efetuar as seguintes divisões:

- ✓ 1. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a - b)$
- ✓ 2. $(a^2 - 7a + 12) : (a - 4)$
- ✓ 3. $(x^4 - 9x^2 + x^3 - 16x - 4) : (x^2 + 4 + 4x)$
- ✓ 4. $(m^2 + m - 72) : (m - 8)$
- ✓ 5. $(1 + 5x^3 - 6x^4) : (1 - x + 3x^2)$
- ✓ 6. $(x^4 - 81y^4) : (x - 3y)$
- ✓ 7. $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) : (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$
- ✓ 8. $(15a^3 - 2a^2 - 38a + 24) : (5a - 4)$
- ✓ 9. $(a^5 - b^5) : (a - b)$
- ✓ 10. $(c^4 - 12 - 7c^2 + c^3 + 17c) : (3 - 2c + c^2)$
- ✓ 11. $(a^5 - 1) : (a - 1)$
- ✓ 12. $(a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6) : (a^2 - 2ab + b^2)$
- ✓ 13. $(x^4 - 6xy - y^2 - 9x^2) : (3x + y + x^2)$
- ✓ 14. $(m^5 - 243) : (m - 3)$
- ✓ 15. $(x^4 - 25y^4 + 6x^3y + 9x^2y^2) : (x^2 + 5y^2 + 3xy)$
- ✓ 16. $(32m^5 - 243n^5) : (2m - 3n)$
- ✓ 17. $(x^8 - 25y^8 + 9x^4y^4 + 6x^6y^2) : (x^4 + 5y^4 + 3x^2y^2)$
- ✓ 18. $(x^6 - y^6) : (x - y)$
- ✓ 19. $(a^7 + 2a^3b^4 - 2a^4b^3 - 2a^6b - 6a^2b^5 - 3ab^6) : (a^3 - 2a^2b - ab^2)$

- ✓ 20. $(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) : (a + b + c)$
- ✓ 21. $(a^4 - b^4) : (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
- ✓ 22. $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd) : (a + b + c + d)$
- ✓ 23. $(x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 19x^2 + 37x - 20) : (5x - 4 + x^3)$

47. **Divisão com resto.** Observando as quatro divisões já efetuadas (§ 46) notaremos que:

- a) O dividendo e o divisor são polinômios racionais e inteiros.
- b) O quociente é também um polinômio racional e inteiro.

Ora, o dividendo e o divisor são polinômios racionais e inteiros, de acordo com a definição da divisão algébrica (§ 44); mas o quociente nem sempre é um polinômio racional e inteiro, isto é, nem sempre é possível, dados dois polinômios racionais e inteiros, determinar um terceiro polinômio também racional e inteiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro. Às vezes, a divisão algébrica deixa um resto, tal qual como a divisão aritmética. Havendo resto, o primeiro polinômio (*dividendo*) não é divisível pelo segundo polinômio (*divisor*).

A não ser em poucos casos, não é possível afirmar, antes de efetuar uma divisão algébrica, que o primeiro polinômio seja exatamente divisível pelo segundo, isto é, que haja um terceiro polinômio racional e inteiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro.

Preliminarmente, devemos ordenar os dois polinômios de acordo com as potências decrescentes de uma mesma letra. Isto pôsto, é provável que a divisão se faça exatamente quando:

- a) O primeiro termo do dividendo é divisível pelo primeiro termo do divisor.
- b) O último termo do dividendo é divisível pelo último termo do divisor.

Estas duas condições resultam claramente do que aprendemos no parágrafo anterior.

Entretanto, os dois polinômios dados preenchem, às vezes, estas duas condições, sem que a divisão seja possível, isto é, sem que o primeiro polinômio seja divisível pelo segundo. E' o que vamos observar no exemplo seguinte.

$$\begin{array}{r}
 x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 19x^2 + 16x + 16 \\
 - x^5 \quad - 5x^3 + 4x^2 \\
 \hline
 - 3x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 16x + 16 \\
 + 3x^4 \quad + 15x^2 - 12x \\
 \hline
 + 5x^3 \quad + 4x + 16 \\
 - 5x^3 \quad - 25x + 20 \\
 \hline
 - 21x + 36
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 5x - 4 \\
 x^2 - 3x + 5
 \end{array}$$

Neste exemplo estão preenchidas as duas condições dadas para que o primeiro polinômio seja divisível pelo segundo. Entretanto, o primeiro

térmo do último resto não é divisível pelo primeiro térmo do divisor. Neste caso, não podemos continuar a divisão porque, se insistíssemos em continuá-la, o quarto térmo do quociente seria $(-21x):x^3$, isto é, $-\frac{21}{x^2}$ ou $-21x^{-2}$, e o quociente deixaria de ser um polinômio inteiro, o que não pode ser em virtude da definição da divisão algébrica.

E observemos que o resto é de grau inferior ao grau do divisor. Havendo resto, teremos:

$$x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 19x^2 + 16x + 16 = (x^3 + 5x - 4)(x^2 - 3x + 5) + (-21x + 36)$$

E' o que os estudantes devem verificar.

Portanto, quer em Aritmética, quer em Álgebra,

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{quociente} + \text{resto}$$

Ou, abreviadamente, $D = d \times Q + R$

Esta *identidade* (§32) é, pois, comum à Aritmética e à Álgebra. Em Aritmética, o resto R é sempre menor que o divisor d ; em Álgebra, o resto R é sempre de *grau inferior* ao do divisor d .

Quando a divisão deixa resto, o quociente pode ser completado com uma fração algébrica, como em Aritmética. Em relação ao nosso exemplo, escreveremos:

$$\begin{aligned}
 (x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 19x^2 + 16x + 16) : (x^3 + 5x - 4) \\
 = x^2 - 3x + 5 + \frac{-21x + 36}{x^3 + 5x - 4}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ou, } \frac{x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 19x^2 + 16x + 16}{x^3 + 5x - 4} = x^2 - 3x + 5 - \frac{21x - 36}{x^3 + 5x - 4} \quad (\S 42)$$

Para concluir observaremos que:

c) A divisão de um polinômio por outro polinômio não é possível, quando o primeiro térmo de um resto qualquer não é divisível pelo primeiro térmo do divisor.

E' claro que esta condição só pode ser verificada no decorrer da operação.

Observação. Não sendo possível dividir um polinômio por outro, indicaremos o quociente em forma de fração. E aparecem assim as frações algébricas.

A fração algébrica é o quociente indicado da divisão de duas expressões algébricas quaisquer.

Em geral, a divisão indicada por uma fração algébrica é impossível.

Exercícios. Série XIX

Efetuar as seguintes divisões, completando o quociente com uma fração algébrica:

- ✓ 1. $(a^5 - b^5) : (a + b)$! ✓ 3. $(m^4 + n^4) : (m + n)$
- ✓ 2. $(x^6 + 64) : (x - 2)$! 4. $(a^3 - 5a^2 + 7a - 10) : (a - 3)$
5. $(m^4 - 7m^2 + 15) : (m + 5)$
6. $(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 8x + 5) : (x^2 - 3x + 5)$
7. $(a^4 - 5a^2 + 7a - 15) : (a^2 + 2a - 3)$
- ✓ 8. Qual é o polinômio que, dividido por $x^2 + 3x - 1$, dá um quociente igual a $x^3 - 2x^2 + 5x - 3$, sendo o resto igual a $3x + 7$?
- ✓ 9. O dividendo é $3x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 6x - 10$, o quociente é $3x^2 - x + 11$ e o resto é $45 - 44x$. Qual é o divisor?
- ✓ 10. Quanto devo subtrair de $x^3 - 5x^2 + 7x - 10$, para que este polinômio seja divisível por $x - 5$?
- ✓ 11. Quanto devemos subtrair de $a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 5a + 6$, para que este polinômio seja divisível por $a^2 + 2a - 3$?

43. Divisibilidade por $x - a$. Façamos dois exercícios simples; calcular o valor numérico do polinômio $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$, para $x = 2$, e dividir o mesmo polinômio por $x - 2$. (Os estudantes fazem os dois exercícios em classe.)

A coincidência é interessante; o valor numérico do polinômio dado, para $x = 2$, é 8; o resto da divisão do mesmo polinômio, pelo binômio $x - 2$, é também 8!

Observemos que o polinômio dado é um polinômio inteiro em x e o divisor $x - 2$ é um binômio do primeiro grau em relação

a x ; dizemos em Matemática que o binômio $x-2$ é um binômio da forma x menos um número qualquer.

Vamos repetir este duplo exercício com outro polinômio inteiro em x ; por exemplo, com o polinômio $2x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x - 7$. Calculemos o seu valor numérico, para $x=3$, e dividamo-lo por $x-3$. (Os estudantes fazem também estes dois exercícios em classe.)

A mesma coincidência! O valor numérico do polinômio dado, para $x=3$, é 35; o resto da divisão do polinômio dado, por $x-3$, também é 35!

Diante destas duas coincidências temos vontade de afirmar que:

O resto da divisão de um polinômio inteiro em x , por um binômio da forma x menos um número qualquer, é igual ao valor que o polinômio adquire, quando nele substituímos x por esse mesmo número.

O que acabamos de afirmar é uma das verdades mais importantes da Matemática, conhecida pelo nome de **teorema de d'Alembert**. Mas, as coincidências nada provam em Matemática; portanto, é necessário demonstrar este teorema.

Seja $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ um polinômio inteiro em x ; seja $x-5$ o divisor, $x^3 + 3x^2 + 18x + 85$ o quociente, e R o resto.

Por ser o dividendo igual ao produto do divisor pelo quociente, e mais o resto, teremos:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = (x-5)(x^3 + 3x^2 + 18x + 85) + R \quad (1)$$

E' necessário observar que o resto R não contém x porque, se o contivesse, poderíamos dividi-lo por $x-5$, e então R deixaria de ser o resto da divisão. (§ 50)

Ora, a igualdade (1) é uma identidade, isto é, ela se verifica sempre, seja qual for o valor de x . Neste caso, substituindo x por 5, resulta:

$$5^4 - 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 - 5 \times 5 + 1 = (5-5)(5^3 + 3 \times 5^2 + 18 \times 5 + 85) + R \quad \therefore$$

$$5^4 - 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 - 5 \times 5 + 1 = 0 \times (5^3 + 3 \times 5^2 + 18 \times 5 + 85) + R \quad (2)$$

No segundo membro desta igualdade temos dois termos: o primeiro é $0 \times (5^3 + 3 \times 5^2 + 18 \times 5 + 85)$; mas este termo é nulo, porque é um produto constituído por dois fatores, um dos quais é zero. Suprimindo-o, então, da igualdade (2), resulta:

$$R = 5^4 - 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 - 5 \times 5 + 1$$

como queríamos demonstrar.

Exercício. Os estudantes devem calcular este valor de R e, em seguida, verificá-lo pela divisão.

Observação. Quando os autores enunciam o teorema de d'Alembert, não dizem x menos um número qualquer; dizem $x-a$, representando por a esse número qualquer.

Exercícios orais

Completar os seguintes enunciados do teorema de d'Alembert:

1. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em a , por um binômio da forma $a-b$,
2. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em m , por um binômio da forma $m-s$,
3. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em b , por um binômio da forma $b-.....$
4. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em c , por um binômio da forma
5. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em (?) por um binômio da forma
6. Para calcular o resto da divisão de um polinômio inteiro em x , por um binômio da forma $2x-5$

Observação. Substituir $2x$ por 5 é fazer $2x=5 \therefore x=\frac{5}{2}$. Portanto, quando o divisor é da forma $2x-5$, substituímos $2x$ por 5 ou x por $\frac{5}{2}$; sendo o divisor $3x-2$, substituímos $3x$ por 2 ou x por $\frac{2}{3}$, etc..

Consideremos um polinômio inteiro em x , por exemplo, $x^3 - x^2 - 13x + 4$, e calculemos o seu valor numérico para $x=4$.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 13x + 4 &= \\ 4^3 - 4^2 - 13 \times 4 + 4 &= \\ 64 - 16 - 52 + 4 &= \\ (64+4) - (52+16) &= \\ 68 - 68 &= 0 \end{aligned}$$

Feitas as operações, verificamos que, para $x=4$, o valor numérico do polinômio dado é zero, isto é, o polinômio dado se anula, para $x=4$. Ora, pelo teorema de d'Alembert, o resto da divisão do polinômio $x^3 - x^2 - 13x + 4$ pelo binômio $x-4$, é zero. Portanto, esse polinômio é divisível pelo binômio $x-4$. Logo,

Se um polinômio inteiro em x se anula pela substituição de x por um número qualquer a , este polinômio é divisível pelo binômio $x-a$.

Exercícios. Série XX

Sem efetuar as divisões indicadas, calcular os restos das mesmas.

$$1. (a^3 + 3a^2 + 5a - 10) : (a-3)$$

2. $(b^5 - 4b^3 + 3b) : (b - 2)$
3. $(c^4 - c^3d + cd^3 - d^4) : (c - d)$
4. $(x^4 - 4x^3y + 7xy^3 - y^4) : (x - y)$
5. $(m^7 - 5m^3 + 2m^2 - 10) : (m - 1)$
6. $(r^3 + 4r^2 - 7r - 15) : (r - 10)$
7. $(y^4 - 5y^3 + 10y^2 - 15y + 20) : (y - 2)$
8. $(a^4 - 5a^3x + 10a^2x^2 - 20ax^3 + x^4) : (a - x)$
9. $(a^4 - 5a^3 + 10a^2 - 12a + 20) : (2a - 1)$
10. $(5x^3 - 7x^2 + 10x - 25) : (2x - 3)$

49. **Divisibilidade por $x + a$.** Dado um polinômio inteiro em x , por exemplo, $x^3 - 5x^2 + 7x - 10$, já sabemos como calcular o resto da divisão deste polinômio, por um binômio da forma x menos um número qualquer; é bastante substituir a letra x do polinômio dado, por este número qualquer, e calcular o valor numérico da expressão resultante.

Consideremos agora o polinômio $x^3 + 7x^2 + 5x + 12$. E' possível calcular o resto da divisão deste polinômio, pelo binômio $x + 3$, sem efetuar a divisão? Sim, é possível; observemos que:

$$x + 3 = x - (-3)$$

E, de acôrdo com o teorema de d'Alembert, para calcular o resto da divisão do polinômio $x^3 + 7x^2 + 5x + 12$, por um binômio da forma x menos um número qualquer, o qual, no caso presente, é o número -3 (menos 3) é bastante substituir a letra x do polinômio dado, pelo número -3 , e calcular o valor numérico da expressão resultante.

$$\begin{array}{l} x^3 + 7x^2 + 5x + 12 = \\ (-3)^3 + 7(-3)^2 + 5(-3) + 12 = \\ -27 + 7 \times 9 + 5(-3) + 12 = \\ -27 + 63 - 15 + 12 = \\ 75 - 42 = 33 \end{array}$$

O valor numérico do polinômio dado, para $x = -3$, é 33. Portanto, o polinômio dado não é divisível por $x + 3$, sendo o resto da divisão igual a 33. Em resumo:

O resto da divisão de um polinômio inteiro em x , por um binômio da forma $x + a$, é igual ao valor que o polinômio adquire quando nele substituímos x por $-a$ (menos a).

Se um polinômio inteiro em x se anula, pela substituição de x por $-a$, este polinômio é divisível por $x + a$.

Exercícios. Série XXI

Sem efetuar as divisões indicadas, calcular os restos das mesmas.

1. $(a^3 + 3a^2 + 5a + 10) : (a + 3)$
2. $(b^5 + 4b^3 + 3b) : (b + 2)$
3. $(c^4 - c^3d + cd^3 - d^4) : (c + d)$
4. $(x^4 - 4x^3y + 7xy^3 - y^4) : (x + y)$
5. $(m^7 + 6m^3 + 2m^2 + 20) : (m + 1)$
6. $(r^3 + 4r^2 - 7r - 20) : (r + 5)$
7. $(a^4 + 5a^3 + 7a^2 + 15a + 20) : (2a + 1)$
8. $(5x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 15x + 30) : (2x + 3)$
9. O polinômio $a^6 + 3a^5 + 5a^4 + 8a^3 + 7a^2 + 10a + 20$ é divisível por $a + 2$? Por que? Qual é o resto?
10. Demonstrar que $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$ é divisível por $z + y$.

50. **Casos notáveis de divisão algébrica.** Em tudo o que se vai seguir, suporemos sempre que o expoente m é um número inteiro e positivo.

Estudemos, agora, os casos notáveis mais simples de divisão algébrica.

I. A diferença entre potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, é sempre divisível pela diferença das bases.

Vamos demonstrar que $a^m - b^m$ é sempre divisível por $a - b$.

O dividendo é um polinômio inteiro em a , e o divisor é um binômio da forma $a - b$; portanto, calculando o resto pelo teorema de d'Alembert, teremos:

$$\begin{array}{r} a^5 - b^5 \\ - a^5 + a^4b \\ \hline + a^4b - b^5 \\ - a^4b + a^3b^2 \\ \hline + a^3b^2 - b^5 \\ - a^3b^2 + a^2b^3 \\ \hline + a^2b^3 - b^5 \\ - a^2b^3 + ab^4 \\ \hline + ab^4 - b^5 \\ - ab^4 + b^5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$a^m - b^m = b^m - b^m = 0$

$\begin{array}{r} a - b \\ \overline{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4} \end{array}$

Como exemplo, dividamos $a^5 - b^5$ por $a - b$. A divisão não deixa resto e o quociente tem uma forma fácil de memorizar.

Exercícios orais

Dizer os quocientes das seguintes divisões:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $(x^3 - y^3) : (x - y)$ | 5. $(m^4 - n^4) : (m - n)$ |
| 2. $(x^5 - y^5) : (x - y)$ | 6. $(a^5 - 1) : (a - 1)$ |
| 3. $(x^4 - 1) : (x - 1)$ | 7. $(x^2 - y^2) : (x - y)$ |
| 4. $(x^3 - 2^3) : (x - 2)$ | 8. $(a^3 - 3^3) : (a - 3)$ |
| 9. $(m^5 - 2^5) : (m - 2)$ | |

II. A soma de duas potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, não é divisível pela diferença das bases.

Vamos demonstrar que $a^m + b^m$ não é divisível por $a - b$.

O dividendo é um polinômio inteiro em a , e o divisor é um binômio da forma $a - b$; portanto, calculando o resto pelo teorema de d'Alembert, teremos:

$$a^m + b^m = b^m + b^m = 2b^m$$

Como exemplo, dividamos $a^5 + b^5$ por $a - b$. Verificaremos que a divisão deixa um resto igual a $2b^5$. Quanto ao quociente, $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$, tem uma forma fácil de memorizar.

Observação. Todos os estudantes fazem esta divisão, na classe. Em seguida, o professor mostra-lhes como se pode aproveitar a divisão relativa ao primeiro caso, para exemplificar o segundo; é bastante mudar o sinal do termo $-b^5$ do dividendo.

Em relação ao segundo caso, podemos completar o quociente com uma fração algébrica. Por exemplo,

$$\frac{x^5 + y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + \frac{2y^5}{x - y}$$

Exercícios orais

Dizer os quocientes completos das seguintes divisões:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $(x^3 + y^3) : (x - y)$ | 5. $(m^4 + n^4) : (m - n)$ |
| 2. $(x^5 + y^5) : (x - y)$ | 6. $(a^5 + 1) : (a - 1)$ |
| 3. $(x^4 + 1) : (x - 1)$ | 7. $(x^2 + y^2) : (x - y)$ |
| 4. $(x^3 + 2^3) : (x - 2)$ | 8. $(a^4 + 3^4) : (a - 3)$ |
| 9. $(m^5 + 2^5) : (m - 2)$ | |

III. A diferença entre potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, é divisível pela soma das bases, quando o expoente é par.

Vamos demonstrar que $a^m - b^m$ é divisível por $a + b$, quando o expoente m é par; sendo ímpar, a divisão deixa um resto igual a $-2b^m$.

O dividendo é um polinômio inteiro em a , e o divisor é um binômio da forma $a + b$; portanto, calculando o resto pelo teorema de d'Alembert, isto é, substituindo a por $-b$, teremos:

$$a^m - b^m = (-b)^m - b^m$$

Sendo m par . . . $(-b)^m - b^m = +b^m - b^m = 0$

Sendo m ímpar . . . $(-b)^m - b^m = -b^m - b^m = -2b^m$

Como exemplo, dividamos $a^4 - b^4$ por $a + b$ e depois $a^5 - b^5$ por $a + b$; acharemos os seguintes quocientes completos:

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$$

$$\frac{a^5 - b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 - \frac{2b^5}{a + b}$$

Como vemos, é fácil memorizar a forma do quociente, observando com atenção que, em relação ao terceiro caso, os termos do quociente são alternadamente positivos e negativos.

Observação. Os estudantes devem efetuar as duas divisões, na classe.

Exercícios orais

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $(x^3 - y^3) : (x + y)$ | 5. $(m^4 - n^4) : (m + n)$ |
| 2. $(x^5 - y^5) : (x + y)$ | 6. $(a^4 - 1) : (a + 1)$ |
| 3. $(x^4 - 1) : (x + 1)$ | 7. $(x^2 - y^2) : (x + y)$ |
| 4. $(x^3 - 2^3) : (x + 2)$ | 8. $(a^4 - 3^4) : (a + 3)$ |
| 9. $(m^5 - 2^5) : (m + 2)$ | |

IV. A soma de duas potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, é divisível pela soma das bases, quando o expoente é ímpar.

Vamos demonstrar que $a^m + b^m$ é divisível por $a + b$, quando o expoente m é ímpar; sendo par, a divisão deixa um resto igual a $+2b^m$.

O dividendo é um polinômio inteiro em a , e o divisor é um binômio da forma $a + b$; portanto, calculando o resto pelo teorema de d'Alembert, isto é, substituindo a por $-b$, teremos:

$$a^m + b^m = (-b)^m + b^m$$

Sendo m par . . . $(-b)^m + b^m = +b^m + b^m = +2b^m$

Sendo m ímpar . . . $(-b)^m + b^m = -b^m + b^m = 0$

Como exemplo, dividamos $a^4 + b^4$ por $a + b$ e depois $a^5 + b^5$ por $a + b$; acharemos os seguintes quocientes completos:

$$\frac{a^4 + b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 + \frac{2b^4}{a + b}$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$$

Também é fácil memorizar a forma destes quocientes, os quais são análogos aos quocientes obtidos no terceiro caso.

Observação. Os estudantes devem efetuar as duas divisões, na classe.

Exercícios orais

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $(x^3 + y^3) : (x + y)$ | 5. $(m^4 + n^4) : (m + n)$ |
| 2. $(x^5 + y^5) : (x + y)$ | 6. $(a^4 + 1) : (a + 1)$ |
| 3. $(x^5 + 1) : (x + 1)$ | 7. $(x^2 + y^2) : (x + y)$ |
| 4. $(x^3 + 2^3) : (x + 2)$ | 8. $(a^4 + 3^4) : (a + 3)$ |
| 9. $(m^5 + 2^5) : (m + 2)$ | |

51. A divisibilidade em Álgebra. Número primo é o número que é divisível somente por si mesmo e pela unidade; os números 13, 17, 29, são primos. Número composto é o número que, além de ser divisível por si mesmo e pela unidade, é ainda divisível por um ou mais números diferentes de si mesmo e da unidade; os números 15, 22, 35, são compostos.

De acordo com a definição da divisão algébrica (§44) um polinômio tem uma infinidade (*) de divisores numéricos. Por exemplo:

$$(a + b + c) : 3 = \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} \quad (x - y) : 5 = \frac{x}{5} - \frac{y}{5}$$

A estes divisores numéricos daremos o nome de *constantes*.

Por analogia com a classificação dos números em primos e compostos, diremos:

Um polinômio racional e inteiro é primo quando é divisível somente por si mesmo e por uma constante. Os polinômios $x - y$, $2a - 3b + c$, são primos.

(*) Uma infinidade de divisores significa tantos divisores quantos quisermos.

Um polinômio racional e inteiro é composto quando, além de ser divisível por si mesmo e por uma constante, é ainda divisível por um ou mais polinômios diferentes de si mesmo. Os polinômios $m^2 - n^2$, $c^3 + d^3$, $x^2 + 2xy + y^2$, $a^2 - 7a + 12$, são compostos.

Observação. As mesmas definições se aplicam com as devidas restrições aos monômios racionais e inteiros.

Decompor um número em fatores primos é transformá-lo em um produto de fatores primos. Por exemplo, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $40 = 2^3 \times 5$, $36 = 2^2 \times 3^2$, etc..

Fatorar uma expressão algébrica é transformá-la em um produto de expressões algébricas. Por exemplo,

$$\begin{array}{lcl} xy = x \times y & | & m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) \\ c^3 + d^3 = (c + d)(c^2 - cd + d^2) & | & x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \\ a^2 + 7a + 12 = (a + 3)(a + 4) & & \end{array}$$

A fatoração algébrica é uma operação, em geral, extremamente difícil. Nestas lições elementares estudaremos apenas os casos mais simples de fatoração, e indispensáveis para que os estudantes possam continuar com facilidade o seu curso de Matemática elementar.

52. Fatoração de um monômio. Neste caso não há dificuldade alguma porque a parte literal do monômio está mostrando quais são os fatores que a constituem; é bastante decompor o coeficiente em seus fatores primos. Por exemplo,

$$\begin{array}{lcl} 5a^2b = 5 \times a^2 \times b & | & 6a^3mx^2 = 2 \times 3 \times a^3 \times m \times x^2 \\ 8abc = 2^3 \times a \times b \times c & | & 10xy^3 = 2 \times 5 \times x^3 \times y \end{array}$$

É útil observar que uma letra qualquer m pode representar um número primo ou composto; com efeito, m pode ser igual a 7, 10, 13, etc.. Mas, enquanto não dermos a m um valor numérico qualquer, m será um monômio primo, por ser divisível somente por si mesmo e por uma constante. Entretanto, o monômio $3m$ é composto porque, além de ser divisível por si mesmo e por uma constante, é também divisível por m ; o monômio $5a^2b$ também é composto porque, além de ser divisível por si mesmo e por uma constante, é também divisível por a , a^2 , b , $5a$, $5a^2$, $5b$, ab , a^2b e $5ab$.

Para calcular todos os divisores de um monômio, podemos proceder como em Aritmética. (E.M.P.V. §118)

53. Fatoração de polinômios. Os polinômios que vamos fatorar serão sempre racionais e inteiros, e o nosso fim, fatorando tais polinômios, consistirá em determinar os seus fatores primos, mas com uma restrição: **tais fatores deverão ser polinômios racionais e inteiros, não somente em relação às letras, como também em relação aos coeficientes.**

Observação. Um ou alguns dos fatores poderão ser monômios.

Consideraremos alguns casos simples.

I. Caso do fator comum. Seja o binômio $15a^2 - 10ab$. Os dois termos deste binômio são divisíveis por $5a$; logo,

$$(15a^2 - 10ab) : 5a = 3a - 2b \quad (A)$$

Por ser o dividendo igual ao produto do divisor pelo quociente, resulta:

$$15a^2 - 10ab = 5a(3a - 2b) \quad (B)$$

Na identidade (B) o primeiro membro é uma *soma algébrica*: $(+15a^2) + (-10ab)$; o segundo membro é um produto: $5a \times (3a - 2b)$. Dizemos então em Álgebra que a expressão $15a^2 - 10ab$ está fatorada e que seus fatores são $5a$ e $3a - 2b$.

Sendo os dois termos do binômio $15a^2 - 10ab$, divisíveis por $5a$, dizemos que $5a$ é um *fator comum* aos termos do binômio e, quando escrevemos

$$15a^2 - 10ab = 5a(3a - 2b)$$

dizemos que o fator $5a$ foi **pôsto em evidência**. Portanto,

Para pôr um fator em evidência, divide-se a expressão dada por este fator e escreve-se que a expressão dada é igual ao divisor multiplicado pelo quociente.

Na prática, a identidade (A) é dispensável, escrevendo-se logo a identidade (B).

Exercício. Fatorar o trinômio $3a^2x - 6b^2x + 12x$.

Solução. $3a^2x - 6b^2x + 12x = 3x(a^2 - 2b^2 + 4)$

Exercícios. Série XXII

Fatorar as seguintes expressões:

- | | | | |
|----------------|--------------------|-----------------------|------------------------|
| 1. $a^2 - a$ | 4. $6a^2 + 9a - 3$ | 7. $9a - 18ab$ | 10. $x^3y + x^2y$ |
| 2. $4 + 4a$ | 5. $5x - 10$ | 8. $x^3y + xy^3 - xy$ | 11. $a^3 - a^2 + a$ |
| 3. $ab^2 + ab$ | 6. $a^2b + ab^2$ | 9. $x^2 - 5x$ | 12. $ab - 3abc + a^2b$ |

Fatorar as seguintes expressões:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 13. $5y^4 - 3y^3 + 7y^2 - 4y$ | 14. $26a^3b - 39a^2b^2 + 52ab^3 - 91ab$ |
| 15. $81x^4y - 135x^3y^2 + 243x^2y^3$ | 16. $35abc - 42abd + 49abe - 7ab$ |
| 17. $34mn + 51m^2n - 119m^3$ | 18. $x^8y^4 - x^7y^5 + x^6y^6 - x^5y^7$ |

II. Fatoração por agrupamento. Consideremos a expressão algébrica

$$ac + ad + bc + bd$$

E' um polinômio de quatro termos, os quais não têm fator comum. Parece, à primeira vista, que este polinômio não pode ser fatorado. Entretanto, observando que o fator a é comum aos dois primeiros termos, e que o fator b é comum aos dois últimos, podemos escrever:

$$ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd) \quad \dots$$

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) \quad (A)$$

Consideremos o segundo membro da identidade (A), isto é,

$$a(c + d) + b(c + d)$$

Os dois termos desta expressão binômica são divisíveis por $c + d$; logo,

$$\frac{a(c+d) + b(c+d)}{c+d} = a + b \quad \dots$$

$$a(c+d) + b(c+d) = (c+d)(a+b) \quad (B)$$

Voltando à identidade (A) e substituindo o segundo membro pela expressão equivalente $(c+d)(a+b)$, resulta:

$$ac + ad + bc + bd = (c+d)(a+b)$$

Exercícios-modelo

1. Fatorar $x^2 - ax - bx + ab$

Solução. $x^2 - ax - bx + ab = (x^2 - ax) - (bx - ab)$

$$x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a)$$

$$x^2 - ax - bx + ab = (x - a)(x - b)$$

2. Fatorar $a^3 + a^2 + a + 1$

Solução. $a^3 + a^2 + a + 1 = (a^3 + a^2) + (a + 1)$

$$a^3 + a^2 + a + 1 = a^2(a + 1) + (a + 1)$$

$$a^3 + a^2 + a + 1 = (a + 1)(a^2 + 1)$$

Exercícios orais

Fatorar as expressões seguintes:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 1. $a(x-y)+b(x-y)$ | 2. $2a(3x-5y)-7b(3x-5y)$ |
| 3. $a(b-c)+(b-c)$ | 4. $(2x-5)-a(2x-5)$ |
| 5. $4b(c+d)+5a(c+d)$ | 6. $x(a-b)+y(b-a)$ |

Observação. Em relação ao sexto exercício parece, à primeira vista, que os dois termos da expressão binômica $x(a-b)+y(b-a)$ não têm fator comum; com efeito, $a-b$ não é o mesmo que $b-a$. Entretanto, com um artifício muito simples, este fator comum vai aparecer.

Em primeiro lugar observemos que, multiplicando uma expressão algébrica por $(-1) \times (-1)$, ela não se altera; com efeito, $(-1) \times (-1) = +1$ e, se multiplicarmos uma expressão algébrica por 1, ela não muda de valor. Portanto,

$$\begin{aligned} x(a-b)+y(b-a) &= x(a-b)+y(b-a)(-1)(-1) \\ x(a-b)+y(b-a) &= x(a-b)+y(-1)(b-a)(-1) \\ x(a-b)+y(b-a) &= x(a-b)-y(a-b) \\ x(a-b)+y(b-a) &= (a-b)(x-y) \end{aligned}$$

Regra. Em um produto constituído por expressões algébricas, podemos, quando nos convier, mudar o sinal de dois fatores, sem que o valor do produto se altere.

Exemplos

$$\begin{aligned} a(b-c)(x-y) &= a(c-b)(y-x) \\ a(b-c)(x-y) &= -a(c-b)(x-y) \\ a(b-c)(x-y) &= -a(b-c)(y-x) \end{aligned}$$

Exercícios. Série XXIII

Fatorar as expressões algébricas seguintes:

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. $ac+ad-bc-bd$ | 10. $2x-y+4x^2-2xy$ |
| 2. $6y-27x^2y-10x+45x^3$ | 11. $x^2-x-a+ax$ |
| 3. $ax-ay-bx+by$ | 12. $bc+bx-cx-x^2$ |
| 4. $1-p+q-pq$ | 13. $x^4-a^2x^2-b^2x^2+a^2b^2$ |
| 5. $y^2-4y+xy-4x$ | 14. $mx+mn+ax+an$ |
| 6. $abx-aby+pqx-pqy$ | 15. $2x^2+6ax+3bx+9ab$ |
| 7. $ay-by-ab+b^2$ | 16. $cdx^2-cxy+dxy-y^2$ |
| 8. $abcy-b^2dy-acdx+bd^2x$ | 17. $cdz^2-cyz+dzy-y^2$ |
| 9. $ab+ay-by-y^2$ | 18. x^3+x^2+x+1 |

III. Caso do trinômio quadrado perfeito. O quadrado de um binômio é sempre um trinômio. (§ 32)

$$\begin{array}{l|l} (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 & (2x+5)^2 = 4x^2+20x+25 \\ (a-3x)^2 = a^2-6ax+9x^2 & (2m-3n)^2 = 4m^2-12mn+9n^2 \end{array}$$

Entretanto, nem sempre um trinômio é quadrado perfeito. Para que o seja, é necessário que:

a) Dois termos sejam quadrados perfeitos.

b) O terceiro termo seja o duplo produto das raízes quadradas dos dois termos que são quadrados.

Consideremos o seguinte trinômio:

$$25a^2 + 60ab + 36b^2$$

O primeiro e o terceiro termos são quadrados perfeitos, cujas raízes são $5a$ e $6b$. Ora, $2 \times 5a \times 6b = 60ab$. Portanto, o segundo termo, $60ab$, é o duplo produto das raízes quadradas dos termos $25a^2$ e $36b^2$. E concluímos que o trinômio

$$25a^2 + 60ab + 36b^2$$

é o quadrado do binômio $5a + 6b$. Podemos então escrever:

$$25a^2 + 60ab + 36b^2 = (5a+6b)^2$$

Fica assim o trinômio $25a^2+60ab+36b^2$ transformado em um produto de dois fatores, a saber $(5a+6b) \times (5a+6b)$.

Se o trinômio dado fosse $25a^2-60ab+36b^2$ escreveríamos:

$$25a^2-60ab+36b^2 = (5a-6b)^2$$

Consideremos agora o trinômio

$$25a^2 + 40ab + 36b^2$$

Este trinômio não é um quadrado perfeito porque não existe um binômio que, elevado ao quadrado, o reproduza. Se este binômio existisse, deveria ser formado pelas raízes quadradas dos termos $25a^2$ e $36b^2$; portanto, seria $5a + 6b$. Ora,

$$(5a+6b)^2 = 25a^2 + 60ab + 36b^2$$

Regra. Para fatorar um trinômio que é quadrado perfeito, extraia-se a raiz quadrada dos dois termos que são quadrados, e ligam-se estas duas raízes com o sinal do termo que não é quadrado.

Exemplo. Fatorar o trinômio $16x^2-24xy+9y^2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{16x^2} &= 4x & \sqrt{9y^2} &= 3y \\ 16x^2-24xy+9y^2 &= (4x-3y)^2 \end{aligned}$$

Observação. O primeiro passo, ao iniciar a fatoração de um polinômio, é verificar se ele contém um fator comum e, no caso afirmativo, pô-lo imediatamente em evidência.

Exercícios. Série XXIV

Dizer se os trinômios que se seguem são ou não são quadrados perfeitos e justificar as respostas.

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1. $a^2 + 4ab + 4b^2$ | 4. $49c^2 - 24cd + 16d^2$ | 7. $a^2 + 2ab - b^2$ |
| 2. $4x^2 - 12xy + 9y^2$ | 5. $m^2 + mn + n^2$ | 8. $x^2 + 10x + 25$ |
| 3. $a^2 - 2a + 1$ | 6. $a^2 + 2ab + b^2$ | 9. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ |

Nos trinômios que se seguem, substituir o ponto de interrogação por um termo tal que o trinômio seja um quadrado perfeito.

- | | | |
|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 10. $x^2 - (?) + y^2$ | 15. $(?) + 2x + 1$ | 20. $x^2 - (?) + 400$ |
| 11. $16a^2 - (?) + 9b^2$ | 16. $(?) + 4x^2y^2 + 4y^4$ | 21. $y^4 - 20y^2 + (?)$ |
| 12. $x^2 + (?) + 196$ | 17. $4a^2 + (?) + 9b^2$ | 22. $(?) - 4ab + 4b^2$ |
| 13. $9x^2y^4 - (?) + 25z^4$ | 18. $x^2 + (?) + 36$ | 23. $(?) - 2abcd + c^2d^2$ |
| 14. $a^2 - 8a + (?)$ | 19. $4a^4 + (?) + 9b^4$ | 24. $(?) + 12ab + b^2$ |

Fatorar os trinômios que se seguem.

- | | | |
|-----------------------|----------------------------|---------------------------|
| 25. $x^2 + 14x + 49$ | 30. $a^2 + 6a + 9$ | 35. $x^2 - 8x + 16$ |
| 26. $m^2 - 12m + 36$ | 31. $a^2 - 10a + 25$ | 36. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ |
| 27. $x^2 - 4x + 4$ | 32. $a^2 - 200a + 10\,000$ | 37. $x^2 + 8x + 16$ |
| 28. $1 + 18x + 81x^2$ | 33. $r^2 + 10rs + 25s^2$ | 38. $m^2 - 12m + 36$ |
| 29. $r^2 - 12r + 36$ | 34. $x^2 - 2x + 1$ | 39. $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ |

IV. Caso da diferença de dois quadrados. Já aprendemos que (§32):

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Reciprocamente,

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Regra. Para fatorar uma diferença entre dois quadrados, extrai-se a raiz de cada quadrado; a soma das duas raízes é o primeiro fator, e a diferença das mesmas raízes é o segundo fator.

Ou, ainda:

A diferença entre dois quadrados é igual à soma das raízes dos dois quadrados, multiplicada pela diferença das mesmas raízes.

Exemplo. Fatorar o binômio $3a^2 - 9b^2$

$$\sqrt{3a^2} = 2a \qquad \sqrt{9b^2} = 3b$$

$$4a^2 - 9b^2 = (2a+3b)(2a-3b)$$

Exercícios. Série XXV

Fatorar os binômios seguintes:

- | | | | |
|---------------------|-------------------------|----------------------|-------------------|
| 1. $a^2 - b^2$ | 8. $a^2 - 4$ | 15. $x^2 - 9$ | 22. $4a^2 - b^2$ |
| 2. $16x^2 - y^2$ | 9. $a^4 - 1$ | 16. $4c^2 - 1$ | 23. $3a^4 - 3$ |
| 3. $25x^2 - 36y^2$ | 10. $4x^2 - 25$ | 17. $25a^4 - 16$ | 24. $4ax^2 - 25a$ |
| 4. $4x^2 - 4y^2$ | 11. $36a^4 - 49y^2$ | 18. $4 - x^2$ | 25. $a^6 - b^6$ |
| 5. $ac^2 - ad^2$ | 12. $a^2 - 1$ | 19. $9 - 4a^2$ | 26. $a^4 - 81$ |
| 6. $a^2x - 4x$ | 13. $x^2 - 1$ | 20. $1 - 25a^2$ | 27. $a^2m - m$ |
| 7. $9x^2 - 4y^2$ | 14. $x^2 - 25$ | 21. $49a^2 - 100b^2$ | 28. $mx^2 - m$ |
| 29. $ax^2 - 25a$ | 30. $100x^2 - 121y^2$ | | |
| 31. $a^4 - b^4$ | 35. $81 - c^4$ | 39. $x^4y^8 - z^4$ | |
| 32. $x^4 - 1$ | 36. $10\,000c^4d^4 - 1$ | 40. $a^4b^4c^4 - 1$ | |
| 33. $81a^4 - 16$ | 37. $625x^4 - 16y^4$ | 41. $16x^4 - 1$ | |
| 34. $2a^4x - 2b^4x$ | 38. $3bm^4 - 3bn^4$ | 42. $5c^4 - 5$ | |

V. Caso do trinômio do segundo grau. As expressões algébricas

$$x^2 - 7x + 12 \qquad y^2 - 8y + 15 \qquad z^2 + 9z + 20$$

são chamadas *trinômios do segundo grau*. Com efeito, cada uma destas expressões é um trinômio porque se compõe de três termos; é do segundo grau porque o termo de grau mais elevado é do segundo grau.

Chama-se *trinômio do segundo grau* o trinômio que contém uma letra (uma variável) a qual figura nos três termos do trinômio com os expoentes dois, um e zero.

Não esqueçamos que os três trinômios dados se podem escrever:

$$x^2 - 7x^1 + 12x^0 \qquad y^2 - 8y^1 + 15y^0 \qquad z^2 + 9z^1 + 20z^0$$

Em geral, estes trinômios provêm da multiplicação de dois binômios da forma $x - a$ e $x - b$. (§32) Já vimos como se multi-

plicam dois binômios desta forma; o que vamos fazer agora é o inverso, isto é, dado um trinômio do segundo grau, por exemplo, $a^2 + 10a + 21$, determinar os dois binômios que, sendo multiplicados um pelo outro, o reproduzem.

Consideremos o trinômio $a^2 + 11a + 30$. Em primeiro lugar escrevemos:

$$a^2 + 11a + 30 = (a + ?)(a + ?)$$

O primeiro termo de cada um dos fatores binômios é a ; os dois segundos termos devem ser dois números tais que sua soma seja $+11$, e seu produto, $+30$. (§ 32, 6.ª fórmula) É fácil verificar que estes dois números são 5 e 6. Logo,

$$a^2 + 11a + 30 = (a + 5)(a + 6)$$

Seja o trinômio $x^2 - 7x + 12$. Escreveremos:

$$x^2 - 7x + 12 = (x + ?)(x + ?)$$

A soma dos segundos termos é -7 , e o produto, $+12$.

Se o produto dos segundos termos é $+12$, segue-se que os segundos termos são ambos positivos ou ambos negativos. Mas a soma dos segundos termos é -7 ; logo, os dois são negativos. É facilmente descobriremos que os dois números cuja soma é -7 e cujo produto é $+12$, são os números -3 e -4 . Portanto,

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

Seja o trinômio $x^2 + 2x - 15$. Escreveremos:

$$x^2 + 2x - 15 = (x + ?)(x + ?)$$

O produto dos segundos termos é -15 ; logo, um deles é positivo, e o outro, negativo. Mas a soma é $+2$; logo, o termo maior, em valor absoluto, é o positivo. E podemos escrever:

$$x^2 + 2x - 15 = (x + ?)(x - ?)$$

Os fatores de 15 são 15 e 1 ou 5 e 3. Ora, os fatores 15 e 1 não servem porque $(+15) + (-1) = +14$. Considerando os fatores 5 e 3, teremos: $(+5) + (-3) = +2$. Portanto,

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

Finalmente, considerando o trinômio $m^2 - 3m - 28$, teremos:

$$m^2 - 3m - 28 = (m + ?)(m + ?)$$

$$m^2 - 3m - 28 = (m - ?)(m + ?)$$

$$m^2 - 3m - 28 = (m - 7)(m + 4)$$

Exercícios. Série XXVI

Fatorar os trinômios seguintes:

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------------|-----------------------|
| 1. $x^2 + 11x + 24$ | 9. $b^2 - 7b + 6$ | 17. $x^2 - 8x + 12$ |
| 2. $x^2 - 7x + 10$ | 10. $a^2 + 11a - 12$ | 18. $y^2 - 7y - 18$ |
| 3. $x^2 + 6x - 7$ | 11. $m^2 - 9m - 36$ | 19. $x^2 + 5x - 84$ |
| 4. $x^2 - 3x - 28$ | 12. $x^2 - 8x - 20$ | 20. $d^2 + 21d + 110$ |
| 5. $m^2 + 13m + 12$ | 13. $c^2 + 3c + 2$ | 21. $y^2 - 7y + 12$ |
| 6. $a^2 + 5a + 6$ | 14. $x^2 - 17x + 30$ | 22. $a^2 + 5a - 14$ |
| 7. $a^2 - 8a + 12$ | 15. $m^2 - 13m + 30$ | 23. $a^2 + a - 42$ |
| 8. $c^2 + 7c + 12$ | 16. $x^2 - 16x + 15$ | 24. $a^2 + 2a - 35$ |
| 25. $a^2x^2 + 14abx + 33b^2$ | 29. $m^4n^4 + 20m^2n^2pq + 51p^2q^2$ | |
| 26. $x^4 - 4a^2x^2 + 3a^4$ | 30. $a^2 + 29ab + 100b^2$ | |
| 27. $a^4b^6 - 11a^2b^3 + 30$ | 31. $x^2y^2z^2 + 9xyz - 22$ | |
| 28. $y^2 - 15ay + 50a^2$ | 32. $a^8 + 15a^4 - 100$ | |

No caso de fatoração que estamos explicando, isto é, no caso em que a expressão algébrica que queremos fatorar é um trinômio do segundo grau, nem sempre o coeficiente do termo do segundo grau é a unidade.

Consideremos o trinômio $4x^2 + 13x + 3$. Para fatorá-lo, vamos recorrer a um artifício.

Multiplicando-o e dividindo-o por 4, coeficiente de x^2 , seu valor não se altera. Portanto,

$$4x^2 + 13x + 3 = \frac{16x^2 + 13 \times 4x + 12}{4}$$

Sendo $16x^2$ um quadrado perfeito, podemos escrever:

$$4x^2 + 13x + 3 = \frac{(4x)^2 + 13 \times 4x + 12}{4}$$

Fazendo $4x = m$, no segundo membro,

$$4x^2 + 13x + 3 = \frac{m^2 + 13m + 12}{4}$$

Fatorando o trinômio $m^2 + 13m + 12$,

$$4x^2 + 13x + 3 = \frac{(m + 12)(m + 1)}{4}$$

Substituindo m pelo seu valor $4x$,

$$4x^2 + 13x + 3 = \frac{(4x + 12)(4x + 1)}{4}$$

Pondo 4 em evidência, no binômio $4x + 12$,

$$4x^2 + 13x + 3 = \frac{4(x + 3)(4x + 1)}{4}$$

Simplificando,

$$4x^2 + 13x + 3 = (x + 3)(4x + 1)$$

Exercícios. Série XXVII

1. Fatorar o trinômio $2x^2 + 5x + 3$.

Sugestão. Multiplicar e dividir por 2.

2. Fatorar o trinômio $3x^2 - x - 10$.

Sugestão. Multiplicar e dividir por 3.

Fatorar os trinômios seguintes:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| ✓ 3. $5x^2 - 38x - 16$ | 9. $11a^2 - 23ab + 2b^2$ | ✓ 15. $2a^2 - 5ab + 2b^2$ |
| ✓ 4. $6a^2 + 7a - 5$ | 10. $6x^2 + 5x - 4$ | 16. $2 + x - 15x^2$ |
| ✓ 5. $3a^2 + 8a + 5$ | 11. $12x^2 - 5x - 2$ | 17. $9a^2 + 3a - 2$ |
| ✓ 6. $6a^2 + 7a - 20$ | 12. $3x^2 + 7x + 2$ | 18. $4a^2 + 8a + 3$ |
| ✓ 7. $10x^2 + 13x - 3$ | 13. $4x^2 + 11x - 3$ | 19. $12a^2 - 7a + 1$ |
| 8. $8a^2 + 14ab - 15b^2$ | 14. $2a^2 - 13ab + 6b^2$ | ✓ 20. $3a^2 - 2a - 5$ |

Observação. Mais tarde, quando estudarmos as equações do segundo grau, aprenderemos uma regra geral para fatorar o trinômio do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c$.

VI. Caso da soma ou diferença de dois cubos. Consideremos os binômios

$$a^3 - b^3$$

$$a^3 + b^3$$

Já sabemos que:

$$(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2 \quad (\S 50, 1.^\circ \text{ caso})$$

$$(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2 \quad (\S 50, 4.^\circ \text{ caso})$$

Portanto,

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exercícios. Série XXVIII

Fatorar os seguintes binômios:

1. $8a^3 - 27b^3$

Solução. $8a^3 - 27b^3 = (2a)^3 - (3b)^3$

$$8a^3 - 27b^3 = (2a - 3b) [(2a)^2 + 2a \times 3b + (3b)^2]$$

$$8a^3 - 27b^3 = (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$$

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------------|-----------------------|
| 2. $8a^3 + 27b^3$ | 6. $a^3 + b^3c^3$ | 10. $64 + y^3$ | 14. $a^3 + 64b^3$ |
| 3. $a^3 - 8$ | 7. $a^6 - b^6$ | 11. $27 + 8x^3$ | 15. $a^3 - 125b^3$ |
| 4. $8 + x^3$ | 8. $x^3 + 8$ | 12. $125x^3 - y^3z^3$ | 16. $8a^3b^3 - 1$ |
| 5. $b^3 - 64$ | 9. $8x^3 - 125$ | 13. $x^6 + y^6$ | 17. $a^3b^3 - c^3d^3$ |

VII. Caso do trinômio $a^4 + a^2b^2 + b^4$. Neste trinômio, os termos a^4 e b^4 são quadrados perfeitos. Entretanto, o trinômio não é um quadrado perfeito, porque o duplo produto das raízes dos dois termos quadrados é $2a^2b^2$ e o termo do meio do trinômio $a^4 + a^2b^2 + b^4$ é a^2b^2 . Ora, é evidente que o trinômio não se altera, se lhe somarmos a^2b^2 e, em seguida, subtrairmos a^2b^2 . Teremos:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^2b^2 - a^2b^2$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

Portanto, para fatorar um trinômio da forma $a^4 + a^2b^2 + b^4$, é necessário somar-lhe e subtrair-lhe um termo tal que o trinômio fique transformado em uma diferença de quadrados.

Exercícios. Série XXIX

Fatorar os seguintes trinômios:

1. $4a^4 - 37a^2b^2 + 9b^4$

N. B. Escrever $-12a^2b^2 - 25a^2b^2$ em lugar de $-37a^2b^2$.

2. $9a^4 + 21a^2b^2 + 25b^4$ (Somar e subtrair $9a^2b^2$)

3. $49x^4 - 15x^2y^2 + 121y^4$ (Somar e subtrair $169x^2y^2$)

4. $9a^4 + 3a^2b^2 + 4b^4$

5. $4x^4 - 37x^2y^2 + 9y^4$

6. $16x^4 - 17x^2y^2 + y^4$

7. $9a^4 + 38a^2b^2 + 49b^4$

VIII. Caso da soma ou diferença de duas potências com expoentes iguais e bases diferentes. Procederemos de vários modos.

1. Fatorar o binômio $a^4 - b^4$. De acordo com o quarto caso de fatoração, teremos:

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$$

2. Fatorar o binômio $a^5 - b^5$. Lembrando o primeiro caso notável de divisão algébrica (§ 50), teremos:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

3. Fatorar o binômio $a^6 - b^6$. De acôrdo com o quarto caso de fatoração, resulta:

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$$

Mas os binômios $a^3 + b^3$ e $a^3 - b^3$ podem ser fatorados, de acôrdo com o sexto caso de fatoração. Logo,

$$a^6 - b^6 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

4. Fatorar o binômio $a^7 - b^7$. Lembrando o primeiro caso notável de divisão algébrica, teremos:

$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

5. Fatorar o binômio $a^8 - b^8$.

$$a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$$

$$a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

$$a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$$

6. Fatorar o binômio $a^9 - b^9$,

$$a^9 - b^9 = (a^3)^3 - (b^3)^3$$

$$a^9 - b^9 = (a^3 - b^3)[(a^3)^2 + a^3b^3 + (b^3)^2]$$

$$a^9 - b^9 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^6 + a^3b^3 + b^6)$$

7. Fatorar o binômio $a^{10} - b^{10}$.

$$a^{10} - b^{10} = (a^5 + b^5)(a^5 - b^5)$$

E, fatorando os dois binômios do segundo membro (§ 50) teremos:

$$a^{10} - b^{10} = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

Em resumo, para fatorar binômios da forma $a^m - b^m$, é necessário recorrer ao quarto e sexto casos de fatoração algébrica, e aos casos notáveis de divisão algébrica.

Entretanto, nem sempre é possível fatorar binômios da forma $a^m + b^m$. Em primeiro lugar, lembremos que este binômio nunca é divisível por $a - b$, e é divisível por $a + b$, quando m é ímpar.

1. Fatorar o binômio $a^3 + b^3$. Pelo sexto caso de fatoração, teremos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

2. Fatorar o binômio $a^4 + b^4$. Não é possível. (§ 50)

3. Fatorar o binômio $a^5 + b^5$.

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

4. Fatorar o binômio $a^6 + b^6$.

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)[(a^2)^2 - a^2b^2 + (b^2)^2]$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

Em resumo, para fatorar binômios da forma $a^m + b^m$, temos de recorrer ao sexto caso de fatoração e ao quarto caso notável de divisão algébrica.

Exercícios variados de fatoração. Série XXX

Fatorar as seguintes expressões algébricas:

1. $cdx^2 + adxy - bcxy - aby^2$

2. $121a^4 - 286a^2y + 169y^2$

3. $81a^4 + 23a^2b^2 + 16b^4$

4. $a^2x + 9abx + 8b^2x$

5. $a^2m - 15am - 100m$

6. $(x+1)^2 - (y-1)^2$

7. $4x^2 + 13x + 3$

8. $64a^3 - 1000b^3$

9. $a^2 + 2ax + x^2 + 4a + 4x$

10. $(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 20)$

11. $(x-y)(x^2 - a^2) - (x-a)(x^2 - y^2)$

12. $4 - x^2 - 2x^3 - x^4$

13. $x^3 - 3xy - 2x^2y^3 + 6y^4$

14. $(ax + by)^2 - 1$

15. $ax^2 - 2axy + ay^2 - az^2$

16. $3ay^2 + 51ay + 180a$

17. $5a^2 - 115a + 660$

18. $3a^2 - 6ab + 3b^2 - 3x^2$

19. $a^{10} - 9a^5 - 10$

20. $a^3x^3 + 216$

21. $(a+b)^3 - c^3$

22. $a^2 - b^2 - a - b$

23. $49(x-y)^2 - 25(a-b)^2$

24. $x^3 - x^2 + x - 1$

25. $2x^2 + 13x + 18$

26. $7x(2x - 5y) - 2y(2x - 5y) + (5y - 2x)$

54. **Máximo divisor comum.** Máximo divisor comum de dois ou mais números é o maior número que os divide, sem deixar resto. (E.M.P.V. §§ 99 a 107; § 120)

Há, em Aritmética, dois processos distintos para calcular o m. d. c. de dois números:

a) o das divisões sucessivas.

b) o da decomposição em fatores primos.

O segundo consiste em decompor os números dados em seus fatores primos, tomar os fatores primos comuns a estes mesmos números, com os seus menores expoentes, e multiplicá-los. O produto obtido é o m. d. c. dos números dados. Podemos então dizer que:

O m. d. c. de dois ou mais números é o produto dos fatores primos comuns a estes mesmos números, cada um deles tomado com o seu menor expoente.

Vejamos agora como proceder para calcular o m. d. c. de duas expressões algébricas racionais e inteiras.

Primeiro exemplo. $D(3a^2b, 6ab^2c, 10abd) = ?$

Fatorando os três monômios, teremos:

$$\begin{array}{l} 3a^2b = 3 \times a^2 \times b \\ 6ab^2c = 2 \times 3 \times a \times b^2 \times c \\ 10abd = 2 \times 5 \times a \times b \times d \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{E observando que os fatores} \\ \text{comuns aos três monômios são} \\ a \text{ e } b, \text{ podemos escrever:} \end{array}$$

$$D(3a^2b, 6ab^2c, 10abd) = ab$$

Observação. Para provar que ab é o m. d. c. dos três monômios dados, podemos fazer um raciocínio idêntico ao que fizemos no livro E.M.P.V. § 120.

Segundo exemplo. $D(6a^3b^2, 9a^2b^4c, 12a^5b^3d) = ?$

$$6a^3b^2 = 2 \times 3 \times a^3 \times b^2$$

$$9a^2b^4c = 3^2 \times a^2 \times b^4 \times c$$

$$12a^5b^3d = 2^2 \times 3 \times a^5 \times b^3 \times d$$

$$D(6a^3b^2, 9a^2b^4c, 12a^5b^3d) = 3a^2b^2$$

Terceiro exemplo. $D(16x^2 - y^2, 12x - 3y) = ?$

$$16x^2 - y^2 = (4x + y)(4x - y)$$

$$12x - 3y = 3(4x - y)$$

$$D(16x^2 - y^2, 12x - 3y) = 4x - y$$

Dêstes três exemplos concluímos que:

O m. d. c. de duas ou mais expressões algébricas racionais e inteiras, é o produto dos fatores primos comuns a estas mesmas expressões, cada um deles tomado com o seu menor expoente.

Exercícios. Série XXXI

Calcular o m. d. c. das seguintes expressões:

1. x^2y, xy^2 4. $6a^3b, 9ab^3$ 7. $7a^4b^4, 14a^3b^4$
2. $3ab, 5bc$ 5. xy^2z^3, x^3yz^2 8. $25xyz, 30x^3y$
3. $2xy, 4ab$ 6. $5a^4b, 15a^3c$ 9. $9m^4n, 15n^2r$
10. $4abc, 6a^2bd, 8a^3be$
11. $7x^2yz, 14x^2y^2z, 21xy^3z^3$
12. $22m^4n^3, 33m^3n^4r, 44m^5n^6s$
13. $5(a-b)c, 10(a-b)d, 15(a-b)e$
14. $2a(x-y)^2, 3a^2(x-y)^3, 5a^3(x-y)^4$
15. $(a+b)^2(x-y), (a+b)^3(x+y)$
16. $6(a-b)^3(x-y), 9(a-b)^4(x-y)^2$
17. $3(a-b+c), 6(a-b+c)d, 9(a-b+c)m$
18. $(2a-3)b, (2a-3)b^2, (2a-3)b^3$
19. $x^2 - y^2, x^2 + 2xy + y^2$
20. $x^2 - y^2, x + y, x - y$
21. $2a^2 - 2a, 4a - 4, 6a^2 - 6$
22. $3x^2y^3 - 3y^5, 2x^2 - 2xy, 12x^3y - 12x^2y^2$
23. $a - x, a^2 - x^2, a^3 - x^3$
24. $7x^2 - 4x, 7a^2x - 4a^2, 14mx - 8m$
25. $a^2 - 2ab + b^2, a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, 5a - 5b$
26. $2a^2 - 2b^2, 6a^2 - 6b^2, 8(a+b)(a-b)$
27. $a^2 - a, a^2 - 2a + 1, a^2 - 1$
28. $ac + ad + bc + bd, 2ax + 2bx, a^2 - b^2$
29. $a^2 + 4ab + 4b^2, a^2 - 4b^2, 5a + 10b$
30. $16x^2 - y^2, 20ax + 5ay, 16x^2 + 8xy + y^2$

55. M. D. C. pelo processo das divisões sucessivas. Em geral, não é fácil calcular o m. d. c. de duas ou mais expressões algébricas, pela sua decomposição em fatores primos; neste caso, é forçoso recorrer ao processo das divisões sucessivas.

A pesquisa do m. d. c. de polinômios pelo processo das divisões sucessivas é, na maioria dos casos, trabalhosa. Daremos aqui apenas exemplos muitos simples.

Em primeiro lugar, é necessário recordar algumas verdades já aprendidas. (E.M.P.V. §§ 100 a 107) E também é útil lembrar que o m. d. c. de dois números não se altera, se um deles é mul-

tiplicado ou dividido por um número que não seja fator comum aos dois números dados. Por exemplo, considerando os monômios a^3b^2c , e a^2bd , teremos:

$$\begin{array}{l|l} D(a^3b^2c, a^2bd) = a^2b & D(a^3b^2c, a^2bd) = a^2b \\ D(a^3b^2, a^2bd) = a^2b & D(a^3b^2c^2, a^2bd) = a^2b \\ D(a^3b^2c, a^2b) = a^2b & D(a^3b^2c, a^2bd^2) = a^2b \end{array}$$

Primeiro exemplo. Calcular o m. d. c. dos seguintes polinômios:

$$2x^2 + x - 3$$

$$4x^3 + 8x^2 - x - 6$$

Aquí não é possível dizer que vamos dividir o polinômio maior pelo menor porque, em se tratando de expressões algébricas, não se pode dizer qual seja a maior das duas; isto só é possível depois de calcular o valor numérico das expressões dadas, para cada valor arbitrário de x . O que vamos fazer é dividir o polinômio de grau mais elevado pelo outro.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 8x^2 - x - 6 & 2x^2 + x - 3 \\ -4x^3 - 2x^2 + 6x & 2x + 3 \\ \hline 6x^2 + 5x - 6 & \\ -6x^2 - 3x + 9 & \\ \hline +2x + 3 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2x^2 + x - 3 & 2x + 3 \\ -2x^2 - 3x & x - 1 \\ \hline -2x - 3 & \\ +2x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Resposta. O m. d. c. dos polinômios dados é $2x + 3$.

Neste exemplo não há dificuldades; o processo das divisões sucessivas foi aplicado tal qual como em Aritmética.

Segundo exemplo. Calcular o m. d. c. dos seguintes polinômios:

$$4x^2 - 8x - 5$$

$$12x^2 - 4x - 65$$

Os dois polinômios são do mesmo grau; neste caso, convém tomar como dividendo o polinômio no qual a mais alta potência de x tem maior coeficiente.

$$\begin{array}{r|l} 12x^2 - 4x - 65 & 4x^2 - 8x - 5 \\ -12x^2 + 24x + 15 & 3 \\ \hline 20x - 50 & \end{array}$$

Ora, o m. d. c. dos polinômios dados é igual ao m. d. c. de $4x^2 - 8x - 5$ e do resto da divisão, isto é, $20x - 50$. Portanto,

$$D(4x^2 - 8x - 5, 12x^2 - 4x - 65) = D(4x^2 - 8x - 5, 20x - 50)$$

Vamos então calcular o m. d. c. dos polinômios $4x^2 - 8x - 5$ e $20x - 50$.

Mas, $20x - 50 = 10(2x - 5)$. E como o fator 10 não pertence ao polinômio $4x^2 - 8x - 5$, este fator 10 pode ser suprimido, sem que o m. d. c. dos dois polinômios se altere. Logo,

$$D(4x^2 - 8x - 5, 20x - 50) = D(4x^2 - 8x - 5, 2x - 5)$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 - 8x - 5 & 2x - 5 \\ -4x^2 + 10x & 2x + 1 \\ \hline +2x - 5 & \\ -2x + 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Resposta. O m. d. c. dos polinômios dados é $2x - 5$.

A disposição prática destas operações pode ser a seguinte:

$$\begin{array}{r|l|l} 12x^2 - 4x - 65 & 3 & 4x^2 - 8x - 5 \\ -12x^2 + 24x + 15 & -4x^2 + 10x & \\ \hline +20x - 50 & +2x - 5 & \\ 10(2x - 5) & -2x + 5 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Resposta. $D(4x^2 - 8x - 5, 12x^2 - 4x - 65) = 2x - 5$.

Terceiro exemplo. Calcular o m. d. c. dos polinômios seguintes:

$$8x^2 + 2x - 3$$

$$6x^3 + 5x^2 - 2$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 5x^2 - 2 & 8x^2 + 2x - 3 \\ \times 4 & 3x + 7 \\ \hline 24x^3 + 20x^2 - 8 & \\ -24x^3 - 6x^2 + 9x & \\ \hline +14x^2 + 9x - 8 & \\ \times 4 & \\ \hline +56x^2 + 36x - 32 & \\ -56x^2 - 14x + 21 & \\ \hline +22x - 11 & \\ 11(2x - 1) & \end{array}$$

O polinômio de grau inferior não contém o fator 4; isto nos permite multiplicar o polinômio $6x^3 + 5x^2 - 2$ por 4, e tornar possível a divisão.

O ultimo resto contém o fator 11, que não pertence ao polinômio $8x^2 + 2x - 3$; neste caso

$$\begin{array}{r|l}
 8x^2+2x-3 & 2x-1 \\
 -8x^2+4x & 4x+3 \\
 \hline
 +6x-3 & \\
 -6x+3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

podemos suprimir o fator 11.

Resposta. O m. d. c. dos polinômios dados é $2x-1$.

Exercícios. Série XXXII

Calcular o m. d. c. dos polinômios seguintes:

1. $3a^3-5a^2x-2ax^2$ e $9a^3-8a^2x-20ax^2$.

Os dois polinômios são divisíveis por a ; podemos suprimir este fator, contanto que o m. d. c. que vamos calcular seja multiplicado por a . Procuremos então o m. d. c. dos polinômios $3a^2-5ax-2x^2$ e $9a^2-8ax-20x^2$.

$$\begin{array}{r|l|l}
 9a^2-8ax-20x^2 & 3 & 3a+x \\
 -9a^2+15ax+6x^2 & 3a^2-5ax-2x^2 & a-2x \\
 \hline
 +7ax-14x^2 & -3a^2+6ax & \\
 7x(a-2x) & +ax-2x^2 & \\
 & -ax+2x^2 & \\
 & \hline
 & 0 &
 \end{array}$$

Resposta. $D(3a^3-5a^2x-2ax^2, 9a^3-8a^2x-20ax^2) = (a-2x) \times a = a^2-2ax$

2. $6a^4+25a^3-21a^2+4a$, $24a^4+112a^3-94a^2+18a$

3. $10x^3+x^2-9x+24$, $20x^4-17x^2+48x-3$

4. $2x^3-4x^2-13x-7$, $6x^3-11x^2-37x-20$

5. $12x^3-9x^2+5x+2$, $24x^2+10x+1$

56. **Mínimo múltiplo comum.** *Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número que se divide por estes dois ou mais números, sem deixar resto.* (E.M.P.V. §§ 121 e 122)

Vejamos como se calcula o m. m. c. de duas ou mais expressões algébricas.

Primeiro exemplo. $M(3a^2b, 6ab^2c, 10abd) = ?$

Fatorando os três monômios, teremos:

$$\begin{aligned}
 3a^2b &= 3 \times a^2 \times b \\
 6ab^2c &= 2 \times 3 \times a \times b^2 \times c \\
 10abd &= 2 \times 5 \times a \times b \times d
 \end{aligned}$$

Tomando todos os fatores comuns e não comuns aos três monômios, cada um deles com o seu maior expoente, e multiplicando-os, teremos:

$$\begin{aligned}
 M(3a^2b, 6ab^2c, 10abd) &= 2 \times 3 \times 5 \times a^2 \times b^2 \times c \times d \\
 &= 30a^2b^2cd
 \end{aligned}$$

Para provar que $30a^2b^2cd$ é o m. m. c. dos três monômios dados, podemos fazer um raciocínio idêntico ao que fizemos no livro E.M.P.V. § 121.

E concluímos que, para calcular o m. m. c. de números ou de expressões algébricas, a regra é a mesma.

Segundo exemplo. $M(16x^2-y^2, 12x-3y) = ?$

$$16x^2-y^2 = (4x+y)(4x-y)$$

$$12x-3y = 3(4x-y)$$

$$M(16x^2-y^2, 12x-3y) = 3(4x+y)(4x-y)$$

Observação. É conveniente deixar o m. m. c. fatorado.

Dêstes dois exemplos concluímos que:

O m. m. c. de duas ou mais expressões algébricas racionais e inteiras é o produto dos fatores primos comuns e não comuns a estas mesmas expressões, cada um deles tomado com o seu maior expoente.

Exercícios. Série XXXIII

Calcular o m. m. c. das seguintes expressões:

1. x^2y, xy^2

2. $3ab, 5bc$

3. $2xy, 4ab$

4. $6a^3b, 9ab^3$

5. xy^2z^3, x^3y^2z

6. $5a^4b, 15a^3c$

7. $7a^4b^4, 14a^3b^4$

8. $15xyz, 10x^3y^2$

9. $15m^4n, 9n^2r$

10. $a(2b-5), a^2(2b-5), 3a(2b-5)^2$

11. $x^2-y^2, x+y, x-y$

12. $a^2+2ab+b^2, (a+b)^3, 5(a+b)$

13. $x^2-7x+12, x-4, x-3$

14. $3a(x^2-y^2), 6b(x+y), 9c(x-y)$

15. $(a-b)^3, a^2-2ab+b^2, a-b$

Frações Algébricas

57. Definição. Dadas duas expressões algébricas A e B, se a expressão A não for divisível pela expressão B, indicaremos a divisão pelo símbolo $\frac{A}{B}$, símbolo este que é chamado *fração algébrica*. (§47) As expressões A e B são chamadas respectivamente **numerador** e **denominador** da fração algébrica; ambas são os **têrmos** da mesma fração.

Os têrmos de uma fração algébrica podem ser expressões *racionais* ou *irracionais*. (§25). No primeiro caso a fração algébrica é **racional**; no segundo, **irracional**.

Todas as propriedades que se aplicam às frações ordinárias e às razões (geométricas) se aplicam também às frações algébricas. Demonstraremos apenas a seguinte:

Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os têrmos de uma fração algébrica por uma mesma quantidade diferente de zero, o valor da fração algébrica não se altera.

Seja $\frac{A}{B}$ a fração dada e, Q, o seu valor; teremos:

$$\frac{A}{B} = Q \quad \therefore A = BQ$$

Multiplicando-se ambos os membros da segunda igualdade por m ($m \neq 0$) resulta: $Am = BQm$

Dividindo ambos os membros desta última igualdade por Bm, teremos:

$$\frac{Am}{Bm} = Q$$

Porém, $Q = \frac{A}{B}$. Logo,

$$\frac{A}{B} = \frac{Am}{Bm}$$

Agora suponhamos que $m = \frac{1}{n}$. Neste caso, teremos:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{A}{n}}{\frac{B}{n}}$$

isto é, *dividindo-se ambos os membros de uma fração algébrica por uma mesma quantidade n (diferente de zero) seu valor não se altera.*

58. Simplificação das frações algébricas. Para simplificar uma fração algébrica, dividem-se ambos os têrmos pelo seu m. d. c.

Primeiro exemplo. Simplificar a fração $\frac{25a^3b^2x}{35a^2bx}$.

$$D(25a^3b^2x, 35a^2bx) = 5a^2bx$$

$$\frac{25a^3b^2x}{35a^2bx} = \frac{25a^3b^2x \div 5a^2bx}{35a^2bx \div 5a^2bx} = \frac{5ab}{7}$$

Segundo exemplo. Simplificar a fração $\frac{20x^2yz^2}{50x^3y^2z}$.

Recorrendo ao método das divisões sucessivas, teremos:

$$\frac{20x^2yz^2}{50x^3y^2z} = \frac{2x^2yz^2}{5x^3y^2z} = \frac{2x^2yz}{5x^3y^2} = \frac{2x^2z}{5x^3y} = \frac{2z}{5xy}$$

Recorrendo ao método do m. d. c., teremos:

$$D(20x^2yz^2, 50x^3y^2z) = 10x^2yz$$

$$\frac{20x^2yz^2}{50x^3y^2z} = \frac{20x^2yz^2 \div 10x^2yz}{50x^3y^2z \div 10x^2yz} = \frac{2z}{5xy}$$

Terceiro exemplo. Simplificar a fração $\frac{a^2 - 6a + 8}{a^2 - 5a + 6}$.

Fatorando-se os dois têrmos da fração, resulta:

$$\frac{a^2 - 6a + 8}{a^2 - 5a + 6} = \frac{(a-4)(a-2)}{(a-3)(a-2)} = \frac{a-4}{a-3}$$

Exercícios. Série XXXIV

Simplificar as frações algébricas seguintes:

- | | | | |
|------------------------------------|--|--|-------------------------|
| 1. $\frac{a}{a^2+ab}$ | 3. $\frac{x^2-xy}{x}$ | 5. $\frac{m^2}{mn+m^2}$ | 7. $\frac{ab}{a^2-ab}$ |
| 2. $\frac{x-y}{x^2-y^2}$ | 4. $\frac{a^2-ab}{a-b}$ | 6. $\frac{m+n}{m^2-n^2}$ | 8. $\frac{a-5}{a^2-25}$ |
| 9. $\frac{ax+ay}{x^2+2xy+y^2}$ | 10. $\frac{a-5}{a^2-10a+25}$ | 11. $\frac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}$ | |
| 12. $\frac{a-b}{b^2-a^2}$ | 13. $-\frac{x^2-y^2}{y-x}$ | 14. $\frac{4x^2-y^2}{y-2x}$ | |
| 15. $\frac{a^2-12a+11}{a^2-a}$ | 17. $\frac{4x^2-9}{4x^2-12x+9}$ | 19. $\frac{9x^2-y^2}{9x^2+6xy+y^2}$ | |
| 16. $\frac{x^2-3x-54}{x^2-18x+81}$ | 18. $\frac{x^3-3x^2-4x}{x^3-8x^2+16x}$ | 20. $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$ | |

59. Redução de frações algébricas ao mesmo denominador. Proceda-se como em Aritmética. (E.M.P.V. § 130)

Primeiro exemplo. Reduzir ao mesmo denominador as seguintes frações:

$\frac{3a}{8b}$	$\frac{5b}{12c}$	$\frac{7c}{18a}$	$8b = 2^3 \times b$
$(9ac)$	$(6ab)$	$4bc$	$12c = 2^2 \times 3 \times c$
$\frac{27a^2c}{72abc}$	$\frac{30ab^2}{72abc}$	$\frac{28bc^2}{72abc}$	$18a = 2 \times 3^2 \times a$
			M.M.C. = $2^3 \times 3^2 \times a \times b \times c$
			M.M.C. = $72abc$

Segundo exemplo. Reduzir ao mesmo denominador as seguintes frações:

$\frac{3a}{2a+2}$	$\frac{4a}{7a-7}$	$\frac{5a}{3a^2-3}$	$2a+2 = 2(a+1)$
$21(a-1)$	$6(a+1)$	(14)	$7a-7 = 7(a-1)$
$\frac{63a(a-1)}{42(a^2-1)}$	$\frac{24a(a+1)}{42(a^2-1)}$	$\frac{70a}{41(a^2-1)}$	$3a^2-3 = 3(a+1)(a-1)$
			M.M.C. = $42(a+1)(a-1)$

Exercícios. Série XXXV

Reduzir ao mesmo denominador as seguintes frações:

- $\frac{3}{5xy^2}, \frac{7}{4x^2y}, \frac{9}{10x^2y^2}$
- $\frac{3a-5}{5}, \frac{5a-7}{6}, \frac{2a+3}{9}, \frac{6a-11}{10}$
- $\frac{7b}{12x^2}, \frac{a}{15xy}, \frac{3ab}{30y^2}, \frac{10a^2b^2}{18x^2y^2}$
- $\frac{7a}{5a^2-5b^2}, \frac{8a}{3a+3b}, \frac{10a}{2a-2b}$
- $\frac{a+3}{a-2}, \frac{2a-1}{2a-4}, \frac{5a+2}{3a-6}, \frac{3a-5}{5a-10}$
- $\frac{7x}{a-b}, \frac{8x}{b^2-a^2}, \frac{10x}{a+b}$
- $\frac{2x}{x^2-2xy+y^2}, \frac{3y}{x^2+2xy+y^2}, \frac{5xy}{x^2-y^2}$
- $\frac{3}{5x-5}, \frac{4}{3x-3}, \frac{5}{2x^2-2}$
- $\frac{a}{x^2+7x+12}, \frac{b}{x^2+4x+3}, \frac{c}{x^2+5x+4}$
- $\frac{5}{x^2-x-6}, \frac{2}{x^2-2x-3}, \frac{4}{x^2+3x+2}$

60. Adição e subtração de frações algébricas. Proceda-se como em Aritmética.

Exercícios. Série XXXVI

- $\frac{2a-3}{5} + \frac{5-3a}{6} - \frac{a-4}{10} =$
- $\frac{a+b}{2a} - \frac{2a-3b}{3b} + \frac{4a^2-3b^2}{6ab} =$
- $\frac{x-5}{4} - \frac{3(2-x)}{5} + \frac{4(2x-3)}{10} =$

4. $\frac{3a^2 - 5x + 5}{4a^2} - \frac{4a^2 - 5x - 3}{3a^2} + \frac{5a - 8}{5a} =$
5. $\frac{a + b}{a - b} + \frac{a - b}{a + b} + \frac{4}{b^2 - a^2} =$
6. $\frac{3}{1 + a} - \frac{4}{1 - a} + \frac{5}{1 + a^2} - \frac{6}{1 - a^2} =$
7. $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} - \frac{2a^3 - a^2 + b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b} =$
8. $\frac{a - b}{a + b} + \frac{b - c}{b + c} + \frac{c - a}{c + a} =$
9. $\frac{2}{x - 3} + \frac{5}{x + 2} + \frac{7}{x^2 - x - 6} =$
10. $\frac{5}{2a(a - 1)} + \frac{4}{3a(a - 2)} - \frac{3}{4a(a^2 - 3a + 2)} =$
11. $\frac{3}{5 + x} - \frac{4}{5 - x} + \frac{2x}{25 - x^2} =$
12. $\frac{3a}{5b} - \frac{b}{2(a + b)} + \frac{5a^2}{a(a + b)} =$

61. Multiplicação e divisão de frações algébricas. Proceda-se como em Aritmética. Antes, porém, de multiplicar duas ou mais frações algébricas, é aconselhável suprimir os fatores comuns a ambos os termos das frações dadas.

Primeiro exemplo. Simplificar a expressão

$$\frac{45(x - y)}{32(z + y)} : \frac{27(x - y)}{128b(z + y)} = \frac{45(x - y)}{32(z + y)} \times \frac{128b(z + y)}{27(x - y)}$$

Cancelando os fatores comuns aos dois termos das frações, isto é, 9, 32, $x - y$ e $z + y$, e multiplicando os fatores não cancelados, teremos $\frac{20b}{3}$, que é a forma mais simples da expressão dada.

Segundo exemplo. Simplificar a expressão

$$\frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 2a + 1} \times \frac{a^2 + 4a + 4}{a^2 - 4a + 4} \times \frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 + 3a + 2}$$

Fatorando todos os trinômios, e indicando a multiplicação, teremos:

$$\frac{(a+1)(a+1)(a+2)(a+2)(a-2)(a-1)}{(a-1)(a-1)(a-2)(a-2)(a+2)(a+1)}$$

Cancelando todos os fatores comuns aos dois termos desta fração, isto é, $a+1$, $a-1$, $a+2$ e $a-2$, teremos:

$$\frac{(a+1)(a+2)}{(a-1)(a-2)} \quad \text{ou} \quad \frac{a^2 + 3a + 2}{a^2 - 3a + 2}$$

que é a forma mais simples da expressão dada.

Exercícios. Série XXXVII

1. $21a^2y \times \frac{9ay^2}{14x^8} \times \left(\frac{2x}{3y^2}\right)^3 =$
2. $\left(\frac{a}{5c^2}\right)^2 \times \left(\frac{-c}{2d}\right)^2 \times \frac{15d}{ac} =$
3. $\frac{3x^2y}{4xz^2} \times \frac{5y^2z}{6xy} \times \frac{12x^2}{2xy^2} \times \left(-\frac{x^3y}{yz}\right) =$
4. $\frac{x-y}{x^2+xy} \times \frac{x^2-y^2}{x^2-xy} : \frac{x}{x-y} =$
5. $\frac{3a^2 + 3b^2}{5a^2 - 5b^2} : \frac{6a - 6b}{5a + 5b} =$
6. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 15} \times \frac{a - 4}{2a^3 - 8a^2} \times \frac{2a^2x - 10a^2}{x^2 - 6x + 9} =$
7. $\frac{10 - 4a}{12x^2} : \frac{5a - 2a^2}{9x} : \frac{6}{5} =$
8. $\frac{a^2 + 3a - 10}{a^2 + 2a - 3} \times \frac{a^2 + 7a + 12}{a^2 - 9a + 14} \times \frac{a - 1}{a + 4} =$

$$9. \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} \times \frac{x^2 - 6x + 7}{x^2 - 8x + 15} \times \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 7x + 10} =$$

$$10. \frac{a^2 + ab + b^2}{x^2 + xy + y^2} : \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} \times \frac{a - b}{x - y} =$$

$$11. \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \right) : \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b} \right) =$$

$$12. \frac{x^2(x+y)}{y^2z^2} \times \frac{y^2(y+z)}{x^2z^2} \times \frac{z^2(z+x)}{x^2y^2} =$$

CAPÍTULO V

Equações do Primeiro Grau

62. **Definições.** Já definimos a igualdade. (E.M.P.V. §70)

Equação é uma igualdade na qual entram letras. Por exemplo, as igualdades

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1)$$

$$3x - 5 = 2x + 5 \quad (2)$$

são equações. Entretanto, em relação a estas duas equações, há uma diferença essencial. Na equação (1) as letras a e b que nela figuram, podem receber valores quaisquer. Com efeito, esta equação é a primeira fórmula de multiplicação algébrica (§32) e, portanto, sejam quais forem os valores numéricos atribuídos às letras a e b , nós já sabemos que o valor numérico da expressão $(a+b)^2$, será sempre igual ao valor numérico da expressão $a^2 + 2ab + b^2$. E' necessário, bem entendido, que, se fizermos $a=5$ e $b=7$ no primeiro membro da equação, também no segundo membro façamos $a=5$ e $b=7$.

Entretanto, na equação (2) já não é possível atribuir à letra x um valor qualquer. Façamos $x=4$ e teremos $7=13$, o que não é verdade. Entretanto, se fizermos $x=10$, teremos $25=25$, o que é verdade. Portanto, considerando as equações (1) e (2), podemos atribuir às letras a e b da primeira, valores quaisquer, porque o valor numérico do primeiro membro será sempre igual ao do segundo; ao passo que, não podemos atribuir à letra x da segunda, um valor qualquer, porque nem sempre o valor numérico do primeiro membro será igual ao do segundo.

Para distinguir a equação (1) da equação (2) diremos que a equação (1) é uma equação idêntica e a equação (2) é uma equação condicional.

Equação idêntica é uma equação que se verifica sempre, sejam quais forem os valores numéricos atribuídos às letras que nela figuram.

Equação condicional é uma equação que se verifica somente para certos e determinados valores atribuídos às letras que nela figuram.

No decorrer destas lições as equações idênticas serão chamadas **identidades**, e as equações condicionais, **equações**. (*)

Observação. As igualdades numéricas entram na categoria das identidades.

Exercícios. Série XXXVIII

N. B. Para verificar uma identidade efetuam-se as operações indicadas nos dois membros.

Verificar as identidades seguintes :

1. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
2. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
3. $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$
4. $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - b^2) = a^6 - b^6$
5. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$
6. $(a - b)(b - c)(c - a) = ac(a - c) - ab(a - b) - bc(b - c)$

63. **Incógnitas e raízes.** Consideremos as equações seguintes :

$$3x - 1 = 2 \quad 5 - 2x = 1 \quad 4x - 1 = 11 \quad 2x - 7 = 3$$

Qual o valor que convém a x , em cada uma destas equações? É fácil verificar que na primeira é 1, na segunda é 2, na terceira é 3 e na quarta é 5.

Entretanto, nem sempre é possível descobrir o valor de x com esta facilidade ; por exemplo, na equação

$$\frac{4+x}{4} + \frac{x-1}{7} = 7 - \frac{23-x}{5} \quad (1)$$

qual o valor de x ? Para descobri-lo, é necessário resolver a equação.

(*) Esta é a lição de G. A. Wentworth, em seu excelente compêndio *A Higher Algebra*; é também a lição de Paul R. Rider Ph. D. da Universidade de Washington, em seu livro recentíssimo *College Algebra*, 3.ª edição, maio de 1942, pág. 20.

Incógnitas de uma equação são as letras que nela figuram e que não podem receber valores quaisquer.

Raízes de uma equação são os valores numéricos (ou literais, quando a equação é literal) que convêm à incógnita.

Resolver uma equação é descobrir as suas raízes.

Suponhamos que, tendo resolvido a equação (1) achamos que a raiz desta equação é 8. Vejamos o que acontece, voltando à equação (1) e substituindo x por 8:

$$\frac{4+8}{4} + \frac{8-1}{7} = 7 - \frac{23-8}{5} \quad \dots \quad 3+1=7-3 \quad \dots \quad 4=4$$

Chegámos a uma identidade. Para verificar se um certo valor numérico (ou literal), a , é a raiz de uma equação dada, substituímos a incógnita x por a . Se desta substituição resulta uma identidade, o valor numérico (ou literal), a , é raiz da equação ; no caso contrário, a não é raiz da equação.

64. **Equações equivalentes.** Duas equações são equivalentes quando têm as mesmas raízes, não sendo possível terem uma raiz diferente.

Assim, para demonstrar que duas equações são equivalentes, é necessário provar que toda solução da primeira satisfaz a segunda e reciprocamente.

Compreende-se portanto que, sob o ponto de vista da resolução, podemos substituir uma equação por outra equivalente.

De um modo geral, para resolver uma equação, transformamos a mesma em equações equivalentes sucessivamente mais simples, até obtermos uma equação de raiz evidente, como, por exemplo,

$$x = 3$$

cujas raiz 3 é evidente.

Estas transformações são baseadas em certos princípios, denominados *Princípios de equivalência*, que passamos a estudar.

65. **Princípios de equivalência. Primeiro.** Somando-se a ambos os membros de uma equação ou deles subtraindo-se uma mesma quantidade, resulta uma equação equivalente à primeira.

Demonstração. Seja a equação

$$A = B \quad (1)$$

onde A e B são polinômios contendo as incógnitas. Somemos aos dois membros a expressão algébrica C. Obteremos a equação

$$A + C = B + C \quad (2)$$

E' fácil provar que as equações (1) e (2) são equivalentes.

1.º *Toda raiz da equação (1) é raiz da equação (2).*

Realmente, seja $x = a$ e $y = b$, uma solução da equação (1). Assim, se substituirmos x por a e y por b , os polinômios A e B assumem valores numéricos iguais A_1 e B_1 , e teremos:

$$A_1 = B_1$$

Porém, pela mesma substituição, a expressão C assumirá um valor numérico C_1 e como, a dois números iguais somando números iguais obtém-se números iguais, podemos concluir:

$$A_1 + C_1 = B_1 + C_1$$

Esta última igualdade prova que a solução considerada satisfaz a equação (2).

2.º *Toda raiz da equação (2) é raiz da equação (1).*

Seja $x = a_1$ e $y = b_1$ uma solução da equação (2). Se substituirmos na equação (2) x por a_1 e y por b_1 , os polinômios A, B e C, assumirão valores numéricos A_2 , B_2 e C_2 , e teremos:

$$A_2 + C_2 = B_2 + C_2$$

Se, dos dois membros desta igualdade numérica subtrairmos o mesmo número C_2 , obteremos resultados iguais; logo, teremos:

$$A_2 = B_2$$

igualdade que prova ser a solução considerada também da equação (1).

As equações (1) e (2) admitem, pois, as mesmas soluções, e são equivalentes.

Segundo. *Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os membros de uma equação por uma quantidade constante e diferente de zero, resulta uma equação equivalente à primeira.*

Demonstração. Seja a equação

$$A = B \quad (1)$$

e m , uma quantidade constante e diferente de zero. Trata-se de provar que a equação (1) é equivalente à equação

$$Am = Bm \quad (2)$$

1.º *Toda solução da equação (1) satisfaz a equação (2).*

Realmente a equação (1) pode ser escrita

$$A - B = 0$$

e a equação (2) com a forma

$$Am - Bm = 0$$

ou,

$$m(A - B) = 0$$

Ora, toda solução da equação (1) anula o polinômio $A - B$ e, como o produto que tem um fator nulo é igual a zero, anulará também o polinômio

$$m(A - B)$$

e satisfará, portanto, a equação (2).

2.º *Toda solução da equação (2) satisfaz a equação (1).*

Realmente, toda solução da equação (2) anula o produto

$$m(A - B)$$

e, como m é, por hipótese, diferente de zero, anulará também o polinômio

$$A - B$$

e verificará, consequentemente, a equação (1).

Assim, as equações (1) e (2) são equivalentes.

Observação. O mesmo princípio pode ser aplicado à divisão, pois dividir por m é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{m}$.

66. Restrições ao segundo princípio. I. Não podemos multiplicar ambos os membros de uma equação por zero, porque a equação resultante não será equivalente à primeira.

* Considerando, por exemplo, a equação $x - 3 = 7$, e multiplicando ambos os membros desta equação por zero, teremos:

$$x - 3 = 7 \quad (A)$$

$$(x - 3) \times 0 = 7 \times 0 \quad (B)$$

A raiz da equação A é 10, e este número é também raiz da equação B. Mas, se observarmos atentamente a equação B, verificaremos imediatamente que **esta equação tem uma infinidade de raízes**; com efeito, substituindo, na equação B, a incógnita x por um número qualquer, por exemplo, 8, teremos:

$$(8-3) \times 0 = 7 \times 0 \quad \dots \quad 0 = 0$$

O mesmo acontecerá se substituirmos x por qualquer outro número 9, 11, 13, 20, 50, etc.. Obteremos sempre uma identidade. Portanto, as equações A e B não são equivalentes, porque a equação A é realmente uma equação e tem somente uma raiz, ao passo que a equação B é uma identidade.

II. Multiplicando-se ambos os membros de uma equação por uma expressão que contenha a incógnita, a equação resultante não será, em geral, equivalente à primeira, porque, além das raízes da equação dada, a nova equação talvez tenha outras, que se dizem *raízes estranhas* à primeira.

Considerando, por exemplo, a equação $x-3=7$, e multiplicando ambos os membros desta equação por $x-5$, teremos:

$$x-3=7 \quad (C)$$

$$(x-3)(x-5)=7(x-5) \quad (D)$$

A raiz da equação C é 10, e este número é também raiz da equação D, como é fácil verificar.

Mas a equação D admite a raiz 5; com efeito,

$$(5-3)(5-5)=7(5-5) \quad \dots \quad 2 \times 0 = 7 \times 0 \quad \dots \quad 0 = 0$$

Ora, a equação C não admite a raiz 5; com efeito, tomando a equação C e substituindo x por 5, teremos:

$$5-3=7 \quad \dots \quad 2=7, \text{ o que não é verdade.}$$

Portanto, as equações C e D não são equivalentes.

E' útil observar que a nova raiz que aparece na equação D é justamente o valor de x que anula o multiplicador $x-5$, isto é, que reduz este binômio a zero.

Se multiplicarmos ambos os membros da equação C por $x+8$, a equação resultante não será equivalente à equação C, porque conterà uma raiz que não convém à equação C, e esta raiz será -8, isto é, o valor de x que anula o multiplicador $x+8$.

Se multiplicarmos ambos os membros da equação C por $2x-6$, a equação resultante não será equivalente à equação C porque terá uma raiz que não convém à equação C, e esta raiz será 3, isto é, o valor de x que anula o multiplicador $2x-6$.

Enfim, multiplicando-se ambos os membros de uma equação por uma expressão algébrica que contenha x , por exemplo... $5x^2-7x+3$, a nova equação em geral não é equivalente à primeira, porque tem raízes que não convêm à primeira, e estas raízes são as raízes da equação $5x^2-7x+3=0$.

Do exposto se conclue que:

Multiplicando-se ambos os membros de uma equação (A), por uma expressão que contenha x , é indispensável verificar se as raízes obtidas pela resolução da equação (B), convêm realmente à equação (A).

Entretanto, esta verificação é inútil, quando as raízes obtidas não anulam a expressão pela qual foram multiplicados ambos os membros da equação. Por exemplo, se ambos os membros de uma equação foram multiplicados por $x-5$, e se a raiz que se obteve é 4, pode-se afirmar que 4 é, realmente, a raiz da equação dada, porque 4 não anula a expressão $x-5$.

III. Não podemos dividir ambos os membros de uma equação por zero. A divisão por zero não tem sentido; com efeito, não é possível dividir um número qualquer, por exemplo, 7, por zero, porque não existe um número que, multiplicado por zero, dê 7.

IV. Dividindo-se ambos os membros de uma equação por uma expressão que contenha a incógnita, a equação resultante não será, em geral, equivalente à primeira.

Acontece justamente o contrário do que foi explicado no parágrafo anterior. No caso da multiplicação, a equação resultante tem, em alguns casos, raízes que não convêm à equação dada, *raízes estranhas*, isto é, raízes que não verificam esta equação. No caso da divisão, a equação resultante pode ter, em alguns casos, menor número de raízes que a equação primitiva; a divisão faz com que a equação dada perca, às vezes, uma ou algumas das suas raízes.

Consideremos, por exemplo, a equação do segundo grau

$$x^2-7x+12=0 \quad (A)$$

Esta equação tem duas raízes, a saber, 3 e 4, como é fácil verificar por substituição. Dividindo-lhe ambos os membros por $x-3$, teremos:

$$x-4=0 \quad (B)$$

E as equações A e B não são equivalentes, porque ambas admitem a raiz 4, mas a equação B não admite a raiz 3. Com a divisão de ambos os membros por $x-3$, a equação A perde a raiz 3, e esta raiz perdida é justamente a raiz que anula o divisor $x-3$.

67. Resolução de uma equação. Armados com os dois princípios estudados nos parágrafos anteriores, passemos à resolução de algumas equações.

Primeiro exemplo. Resolver a equação $3x-15=5+2x$.

Observemos que o primeiro membro desta equação tem dois termos, um dos quais contém x (o termo $3x$) e o outro não contém x (o termo 15). O mesmo acontece com o segundo membro da equação.

E' conveniente passar para o primeiro membro, todos os termos que contém x , e para o segundo, os que não o contém, isto é, os termos conhecidos ou termos independentes da incógnita. De que modo?

$$3x-15=5+2x \quad (A)$$

Diminuindo $2x$ de ambos os membros da equação A, (princípio da subtração) resulta:

$$3x-15-2x=5+2x-2x \quad (B)$$

As equações A e B são equivalentes e, notando que no segundo membro da equação B temos $+2x-2x=0$, resulta:

$$3x-15-2x=5 \quad (C)$$

Somando 15 a ambos os membros da equação C, (princípio da adição) resulta:

$$3x-15-2x+15=5+15 \quad (D)$$

As equações A, B, C e D são equivalentes e, notando que no primeiro membro da equação D temos $-15+15=0$, resulta:

$$3x-2x=5+15 \quad (E)$$

Reduzindo os termos semelhantes,

$$x=20 \quad (F)$$

Qual é a raiz da equação F? E' 20, evidentemente. E as equações A, B, C, D, E e F, sendo equivalentes, conclue-se que a raiz da equação A é 20. Com efeito, substituindo x por 20, na equação A, teremos:

$$3 \times 20 - 15 = 5 + 2 \times 20 \quad \dots \quad 60 - 15 = 5 + 40 \quad \dots \quad 45 = 45$$

Observando com atenção o processo seguido para resolver a equação A, podemos concluir que:

Resolver uma equação é transformá-la em outras equivalentes, porém de forma cada vez mais simples, até chegar a uma equação cuja raiz seja evidente.

Comparemos as equações A e E.

$$3x-15=5+2x \quad (A)$$

$$3x-2x=5+15 \quad (E)$$

Examinando-as com atenção, observamos que o termo conhecido -15 do primeiro membro da equação A está no segundo membro da equação E, *porém com sinal contrário, isto é, positivo*; observamos também que o termo $+2x$ do segundo membro da equação A, está no primeiro membro da equação E, *porém com sinal contrário, isto é, negativo*. Podemos, então, estabelecer a seguinte

Regra. E' sempre possível passar um termo de um para outro membro de uma equação, contanto que se lhe troque o sinal. E' o que se chama a transposição de um termo.

Segundo exemplo. Resolver a equação $5x-(8-2x)=10+6x$

Eliminando os parênteses. $5x-8+2x=10+6x$

Reduzindo os termos semelhantes. $7x-8=10+6x$

Transpondo. $7x-6x=10+8$

Reduzindo os termos semelhantes. $x=18$

Observação. Antes de transpor termos, é conveniente reduzir os termos semelhantes existentes em cada membro da equação.

Terceiro exemplo. Resolver a equação $3x-5=4x+9$

Transpondo. $3x-4x=9+5$

Reduzindo. $-x=14$

A incógnita se apresenta nesta última equação com o sinal negativo. Sempre que isto acontece, é de rigor multiplicar ambos

os membros da equação por *menos 1*, o que é permitido de acôrdo com o princípio da multiplicação; resultará:

$$x = -14$$

A raiz da equação dada é -14 . Com efeito, substituindo x por -14 , teremos:

$$3(-14) - 5 = 4(-14) + 9 \dots -42 - 5 = -56 + 9 \dots -47 = -47$$

Fica então estabelecido que:

Estando uma equação completamente simplificada, se o termo que contém x (o primeiro membro da equação) é negativo, é necessário multiplicar ambos os membros da equação por menos um.

Na prática diremos: *trocando os sinais...*

Quarto exemplo. Resolver a equação

$$10 - (3x + 5) + 7x = 5x - (2 - 4x) + 22$$

Eliminando os parênteses $10 - 3x - 5 + 7x = 5x - 2 + 4x + 22$

Reduzindo $4x + 5 = 9x + 20$

Transpondo $4x - 9x = 20 - 5$

Reduzindo $-5x = 15$

Trocando os sinais $5x = -15$

Dividindo por 5 $x = -3$

Observação. Chegados à equação $5x = -15$, tivemos de dividir ambos os membros por 5, o que é permitido em virtude do princípio da divisão.

Quinto exemplo. Resolver a equação

$$3(2x - 5) - 4(7 - 3x) = 13 - 3x$$

Eliminando os parênteses $6x - 15 - 28 + 12x = 13 - 3x$

Reduzindo $18x - 43 = 13 - 3x$

Transpondo $18x + 3x = 13 + 43$

Reduzindo $21x = 56$

Dividindo por 21 $x = \frac{56}{21} \dots x = \frac{8}{3}$

Exercícios. Série XXXIX

Resolver as seguintes equações:

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $16 + 4x - 4 = x + 12$ | 5. $3x + 8 - (6x - 7) = 2x + 15$ |
| 2. $6x - 13 + 2x + 3 = 0$ | 6. $2x - 3 - (4x - 2) = 5x + 4 - (3x + 1)$ |
| 3. $8 + 7x - 13 = x - 27 - 5x$ | 7. $4(6x - 10) - 2x = 6x - 40$ |
| 4. $9x + 2 - (4x + 5) = 4x + 3$ | 8. $3(2 - x) - 5(7 - 2x) = 10 - 4x + 5$ |

- | | |
|---|---|
| 9. $3x - 2(4 - x) = 7 - 3x$ | 15. $25x + 7 = 177 - 9x$ |
| 10. $5x - 4 = 7x + 10$ | 16. $5x + 13 - 2x = 100 - 20x - 18$ |
| 11. $5x + 18 = 3x + 38$ | 17. $9x + 22 - 2x = 193 - 22x - 84$ |
| 12. $9x + 17 = 102 - 8x$ | 18. $9x + 15 - 2x = 100 - 12x - 31 + x$ |
| 13. $31 - 7x = 41 - 8x$ | 19. $16x + 10 - 21x = 45 - 10x - 15$ |
| 14. $29x - 57 = 16x - 5$ | 20. $4x + 3 + 5x + 11 - 8 = -5x - 8$ |
| 21. $2(x - 3) - 3(1 - 2x) = 3(2 - x) - 2(5 - 3x)$ | |
| 22. $(3x - 4) - [2 - (x - 4)] = (3x - 4) - 2$ | |
| 23. $2x - [x + (1 - x)] = 2x - (1 + x)$ | |

68. Equações com denominadores numéricos. O primeiro passo consiste em eliminar os denominadores. Como exemplo, vamos resolver a seguinte equação:

$$\frac{x}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2}{5} - \frac{5x}{6}$$

E' necessário eliminar os denominadores. Com êste fim multiplicamos ambos os membros da equação por um número que seja divisível por 2, 4, 5 e 6. Há uma infinidade de números divisíveis por 2, 4, 5 e 6; devemos preferir o menor múltiplo comum a êstes quatro números, isto é, 60. Multiplicando ambos os membros da equação dada por 60 teremos:

$$\frac{x \times 60}{2} - \frac{3 \times 60}{4} = \frac{2 \times 60}{5} - \frac{5x \times 60}{6}$$

$$x \times 30 - 3 \times 15 = 2 \times 12 - 5x \times 10$$

$$30x - 45 = 24 - 50x, \text{ etc.}$$

Entretanto, na prática, se procede mais rapidamente. Observemos que:

$$\frac{x}{2} \times 60 = 60 \times \frac{x}{2} = 60 \div 2 \times x = 30x$$

$$\frac{3}{4} \times 60 = 60 \times \frac{3}{4} = 60 \div 4 \times 3 = 45$$

$$\frac{2}{5} \times 60 = 60 \times \frac{2}{5} = 60 \div 5 \times 2 = 24$$

$$\frac{5x}{6} \times 60 = 60 \times \frac{5x}{6} = 60 \div 6 \times 5x = 50x$$

Donde se deduz a seguinte

Regra. Para eliminar os denominadores de uma equação, calcula-se o menor múltiplo comum destes denominadores; em seguida, divide-se este menor múltiplo comum pelo denominador de cada termo, e multiplica-se o quociente pelo numerador correspondente. Se um termo não tem denominador, dá-se-lhe mentalmente o denominador um.

Primeiro exemplo. Resolver a equação

$$\frac{4+x}{4} + \frac{x-1}{7} = 7 - \frac{23-x}{5} \quad (A)$$

O m. m. c. dos denominadores é 140. Aplicando a regra para a sua eliminação, teremos:

$$35(4+x) + 20(x-1) = 140 \times 7 - 28(23-x) \quad (B)$$

$$140 + 35x + 20x - 20 = 980 - 644 + 28x \quad (C)$$

$$55x + 120 = 28x + 336$$

$$55x - 28x = 336 - 120$$

$$27x = 216$$

$$x = 8$$

Segundo exemplo. Resolver a equação

$$4x - 7 = \frac{2x}{3} + \frac{4x+3}{5} \quad (A)$$

O menor múltiplo comum dos denominadores é 15. Aplicando a regra para a sua eliminação, teremos:

$$15 \times 4x - 15 \times 7 = 5 \times 2x + 3(4x+3) \quad (B)$$

$$60x - 105 = 10x + 12x + 9 \quad (C)$$

$$60x - 105 = 22x + 9$$

$$60x - 22x = 9 + 105$$

$$38x = 114$$

$$x = 3$$

Observação. Quando o numerador da fração é um polinômio, o estudante deve indicar primeiramente a multiplicação, e depois efetuar-lá. Resolvendo a equação A, passará para a equação B, e depois para a equação C. Se quiser passar diretamente da equação A para a equação C, arriscar-se-á aos erros de sinal, tão comuns entre os principiantes.

Terceiro exemplo. Resolver a equação.

$$\frac{4x-6}{12} - \frac{3x-8}{4} = \frac{2x-9}{6} - \frac{x-4}{8}$$

O m. m. c. dos denominadores é 24. Eliminando-os, teremos:

$$2(4x-6) - 6(3x-8) = 4(2x-9) - 3(x-4)$$

$$8x - 12 - 18x + 48 = 8x - 36 - 3x + 12$$

$$-10x + 36 = 5x - 24$$

$$-10x - 5x = -24 - 36$$

$$-15x = -60$$

$$15x = 60$$

$$x = 4$$

Exercícios. Série XL

Resolver as seguintes equações:

$$1. \frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$$

$$5. \frac{3x}{4} = \frac{2}{5}$$

$$9. \frac{1}{8} = \frac{x}{2} - \frac{4x}{3}$$

$$2. \frac{x}{7} = \frac{2}{5}$$

$$6. \frac{x}{3} = \frac{2}{5} + \frac{x}{2}$$

$$10. \frac{7x}{8} = \frac{3}{10}$$

$$3. \frac{1}{4} = \frac{3x}{10}$$

$$7. \frac{2x}{3} + 5 = \frac{x}{4}$$

$$11. \frac{3}{5} = \frac{1}{4} - \frac{x}{3}$$

$$4. \frac{5x}{7} = \frac{1}{2}$$

$$8. \frac{3x}{2} + \frac{5x}{3} = \frac{1}{10}$$

$$12. \frac{3x}{5} = -\frac{1}{4}$$

N. B. Em relação ao exercício 12, os estudantes podem escrever $-\frac{1}{4}$ em lugar de $-\frac{1}{4}$. É útil lembrar que $(+a) \div (-b) = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

$$13. (x+7)(x-3) = (x-5)(x-15)$$

$$14. 9x - 3(5x-6) + 30 = 0$$

$$15. (x-2)(7-x) + (x+5)(x+3) - 2(x-1) + 12 = 0$$

$$16. (x+3)^2 - (x+2)^2 = 3x + 20$$

$$17. 6x - 2(9-4x) + 3(5x-7) = 10x - (4+16x+35)$$

$$18. \frac{4+x}{3} - \frac{5+2x}{9} = \frac{8-3x}{2}$$

$$19. \frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1$$

20. $\frac{3x}{8} + \frac{5x}{12} - \frac{7x}{6} + \frac{x}{2} = 3$
21. $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2$
22. $\frac{8-x}{6} + \frac{3x-5}{3} = \frac{x+6}{2} - \frac{x}{3}$
23. $\frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} = 7 - \frac{4+x}{4}$
24. $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + 3\right) = x - \frac{3}{2}$
25. $\frac{5x+3}{8} - \frac{3-4x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{31}{2} - \frac{9-5x}{6}$
26. $\frac{7x+5}{6} - \frac{5x-6}{4} = \frac{8-5x}{12}$
27. $\frac{x+1}{2} + \frac{x-2}{3} - \frac{x+3}{3} = 2$
28. $\frac{5x+12}{6} - \frac{4}{11}(2x+7) + \frac{1}{3} = 0$
29. $\frac{3}{4}(x-1) + \frac{5x-7}{4} = \frac{3}{2}$
30. $\frac{x-7}{6} + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right) = \frac{3x-22}{6}$
31. $\frac{5x-11}{4} - \frac{5x+3}{19} = \frac{41-3x}{5}$
32. $\frac{2x}{3} - \frac{17x}{12} = 9 - \frac{3}{4}(x+12)$
33. $\frac{4x-13}{5} - \frac{8x-5}{20} + \frac{5x}{2} - 14 = \frac{7x}{8} - \frac{11x-3}{15}$
34. $\frac{x-1}{4} - \frac{x-2}{3} = \frac{x-3}{2} - \frac{5}{12}$
35. $\frac{13-30x}{20} - \frac{9-80x}{6} - \frac{50x-4}{3} = 0$
36. $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{6}\right)(x+3)$
37. $2 + \frac{x-1}{2} = 10 - \frac{3x-1}{5}$

69. **Equações literais.** As equações já resolvidas são equações numéricas, porque os coeficientes da incógnita são valores numéricos.

A's vêzes, porém, a equação contém as letras a, b, c, m, n , etc., que não representam incógnitas mas que representam números quaisquer supostos conhecidos. Dá-se a esta equação o nome de *equação literal*. Por exemplo, a equação

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 0$$

é uma equação literal. A incógnita é x ; as letras a e b representam números quaisquer supostos conhecidos; são chamadas *constantes arbitrárias*.

As equações literais do 1.º grau se resolvem, obedecendo às mesmas regras estabelecidas para as equações numéricas do 1.º grau.

Primeiro exemplo. Resolver a equação $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 0$

Eliminando os denominadores . . . $a(x-a) + b(x-b) = 0$

Eliminando os parênteses . . . $ax - a^2 + bx - b^2 = 0$

Transpondo . . . $ax + bx = a^2 + b^2$

Pondo x em evidência . . . $x(a+b) = a^2 + b^2$

Dividindo por $a+b$. . . $x = \frac{a^2 + b^2}{a+b}$

Segundo exemplo. Resolver a equação $\frac{x+2}{x-2} = \frac{m+n}{m-n}$

Quando uma equação literal se apresenta com a forma de uma proporção, o meio mais simples para eliminar os denominadores é aplicar-lhe o teorema fundamental das proporções. (E.M.S.V. § 61) Assim procedendo com a equação acima, resulta:

$$(x+2)(m-n) = (x-2)(m+n) \quad \dots$$

$$mx + 2m - nx - 2n = mx - 2m + nx - 2n \quad \dots$$

$$mx - nx - mx + nx = -2m - 2n - 2m + 2n \quad \dots$$

$$-2nx = -4m \quad \therefore 2nx = 4m \quad \therefore x = \frac{4m}{2n} \quad \therefore x = \frac{2m}{n}$$

Exercícios. Série XLI

Resolver as equações literais seguintes:

- | | |
|---|---|
| 1. $a + x = a + 5$ | 6. $(a + b)(a - x) = a(b - x)$ |
| 2. $4(3b - x) = 3(2b + x)$ | 7. $(a^2 + x)^2 = x^2 + 4a^2 + a^4$ |
| 3. $x(a - b) = 3(a + b)$ | 8. $3ax - ab = 2ax - ac$ |
| 4. $(x - a)(x - b) = x(x + c)$ | 9. $5(x - 2a) + 3(x - a) = 2x$ |
| 5. $5(a - 3x) = 2(a + x) - 4x$ | 10. $2a - cx = 3c - 5bx$ |
| 11. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} = 3$ | 14. $\frac{a(a - x)}{b} + \frac{b(b - x)}{a} = 0$ |
| 12. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 3$ | 15. $\frac{x - a}{b} - \frac{x - b}{a} = \frac{3(b - a)}{a}$ |
| 13. $\frac{ax - 1}{b} = \frac{1 - ax}{a}$ | 16. $\frac{m - x}{n} - \frac{n - x}{m} = 0$ |
| 17. $\frac{x^2 - a}{bx} - \frac{a - x}{b} = \frac{2x}{b} - \frac{a}{x}$ | 19. $\frac{x + a}{b} - \frac{x + b}{a} = \frac{2(a - b)}{ab}$ |
| 18. $\frac{ax - b}{c} + a = \frac{x + ac}{c}$ | 20. $\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{x}\right) = 1$ |
| 21. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$ | 23. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} = d$ |
| 22. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = d$ | 24. $\frac{a}{b - x} = \frac{b}{a - x}$ |
| | 25. $\frac{x + 2}{x - 2} = \frac{m + n}{m - n}$ |
| | 26. $\frac{m + n}{2 + x} = \frac{m - n}{2 - x}$ |

70. **Resolução algébrica de um problema.** A Álgebra nos permite resolver numerosos problemas com mais facilidade e rapidez que a Aritmética. E' necessário, porém, **saber pôr o problema em equação.** Esta é a fase mais difícil da resolução algébrica de um problema. A segunda fase, isto é, resolver a equação, é uma operação cuja dificuldade cresce com o grau da equação, com o número de incógnitas, etc.. (§74) Há uma terceira fase da qual trataremos oportunamente na quarta série ginásial.

Damos a seguir alguns problemas que deverão ser resolvidos em classe (quatro ou cinco ou mais por dia) para que os estudantes adquiram, pouco a pouco, a prática necessária para **pôr um problema em equação.** (*)

(*) A resolução dos problemas do primeiro grau está incluída no programa da quarta série ginásial. Entretanto, julgamos útil mostrar desde já aos nossos alunos como a Álgebra facilita a resolução dos problemas.

Exercícios. Série XLII

Os estudantes resolverão os problemas que se seguem, *com uma incógnita.*

1. Qual o número cujo dobro mais 5 é igual a 57?

Seja x este número; de acordo com o enunciado do problema,

$$2x + 5 = 57 \therefore 2x = 57 - 5 \therefore 2x = 52 \therefore x = 26$$

2. Qual o número cuja metade mais a terça parte é igual a 25?

Seja x este número; de acordo com o enunciado do problema,

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25 \therefore 3x + 2x = 150 \therefore 5x = 150 \therefore x = 30$$

3. Qual o número que, somado com o triplo de si mesmo, dá 52?

4. Somando 54 à minha idade, o resultado é o quádruplo da minha idade. Qual a minha idade?

5. Calcular dois números cuja soma é 105 e cujo quociente é 6.

Seja x o menor dos dois números pedidos; se o maior contém 6 vezes o menor, deverá ser representado por $6x$. E sendo a soma dos dois números igual a 105, resulta que:

$$x + 6x = 105 \therefore 7x = 105 \therefore x = 15$$

O número menor é 15 e o maior é 6×15 , isto é, 90.

6. Calcular dois números cuja soma é 276 e cujo quociente é 11.

7. Calcular dois números cuja diferença é 230 e cujo quociente é 11.

8. Calcular dois números cuja diferença é 216 e cujo quociente é 7.

9. A soma dos capitais de dois negociantes é 93 800 cruzeiros. Se o capital de um deles é igual a 7 vezes o do outro, qual o capital de cada um?

10. Multiplicando um certo número por 13, o produto é igual ao multiplicando aumentado de 1 020 unidades. Qual é este número?

11. Um retângulo tem 138m de perímetro. Sendo o comprimento igual ao dobro da largura, quanto mede cada uma destas dimensões?

Sendo x a largura, o comprimento será $2x$. Onde $2(x + 2x) = 138$.

12. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro mede 2 024m, sendo a largura igual a um terço do comprimento.

13. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro mede 2 930m, sendo o comprimento igual ao quádruplo da largura.

14. Quais são as dimensões de um retângulo cujo perímetro mede 732m, sendo a largura igual a um quinto do comprimento?

15. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro mede 316m, sendo a largura igual a três sétimos do comprimento.

Seja x o comprimento; a largura será $\frac{3x}{7}$. Onde, $2\left(x + \frac{3x}{7}\right) = 316$.

16. Calcular dois números consecutivos cuja soma é 75.

Dois números são consecutivos quando sua diferença é igual a 1; os números 15 e 16, 23 e 24, 36 e 37, são consecutivos. Seja x o menor dos números pedidos no problema; o outro será $x + 1$. Onde $x + (x + 1) = 75$, etc..

17. Quais são os três números consecutivos cuja soma é 852?

18. Calcular quatro números consecutivos tendo por soma 774.

19. Calcular cinco números consecutivos tendo por soma 3 570.

20. Dois números consecutivos são tais que subtraindo 3 do primeiro e somando 5 ao segundo, a soma dos dois resultados é 37. Quais são os dois números?

Sejam x e $x+1$ os dois números pedidos; então $(x-3)+(x+1+5)=37$.

21. Calcular dois números pares consecutivos cuja soma é 106.

Sejam $2x$ e $2x+2$ os dois números pedidos, etc..

22. Calcular três números pares consecutivos tendo por soma 732.

23. Calcular três múltiplos consecutivos de 7, tendo por soma 189.

Sejam $7x$, $7x+7$ e $7x+14$ os três números pedidos, etc..

24. A diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é 43. Quais são os dois números?

Sejam x e $x+1$ os dois números; então $(x+1)^2 - x^2 = 43$.

25. Um número é o quádruplo de outro. Se eu subtrair 99 do maior, e 36 do menor, os restos serão iguais. Quais são os dois números?

26. Pai e filho têm juntos 85 anos e a idade do pai é o quádruplo da do filho. Qual é a idade de cada um?

27. Um pai tem 48 anos e seu filho, 12. Há quantos anos a idade do pai era igual a 7 vezes a do filho?

Há x anos; o pai tinha então $48-x$ e o filho, $12-x$. E a idade do pai era igual a 7 vezes a do filho, isto é, $48-x=7(12-x)$, etc..

28. Um pai tem 24 anos e seu filho tem 2. Quantos anos deverão decorrer para que a idade do pai seja igual ao dobro da do filho?

29. Dividir 90 em duas partes tais que 4 vezes uma seja igual a 5 vezes a outra.

Seja x a primeira; a segunda será $90-x$, etc..

30. Antônio tem o triplo da idade de Pedro; há 8 anos tinha o quádruplo. Qual é a idade de cada um?

31. Carlos tem 8 vezes a idade de Dário; dentro de 4 anos a idade de Carlos será igual a 4 vezes a idade de Dário. Qual é a idade de cada um?

32. Eu tenho 60 anos e meus três sobrinhos têm 48 anos. Quantos anos deverão decorrer para que a soma das idades de meus sobrinhos seja igual à minha?

33. A idade de um filho é a terça parte da do pai; há 8 anos era a quinta. Qual é a idade de cada um?

34. Calcular dois números tendo por diferença 253 e por quociente 12.

35. Calcular dois números tendo por soma 252 e por quociente 17.

36. Dividir o número 126 em duas partes tais que uma seja o dobro da outra.

37. Três irmãos ganharam 20 000 cruzeiros. O segundo recebeu a metade do que ganhou o primeiro, e o terceiro recebeu a quinta parte do que ganhou o segundo. Quanto ganhou cada um?

38. Dividir 900 cruzeiros por três pessoas, de modo que a segunda receba 50 cruzeiros mais do que a primeira, e a terceira tanto como as duas primeiras.

39. Dividir 190 cruzeiros entre quatro pessoas, de modo que a segunda receba 10 cruzeiros mais do que a primeira, a terceira 20 cruzeiros menos que a segunda, e a quarta tanto quanto a primeira e a terceira.

40. Gastei a metade do meu dinheiro, mais um quarto, mais um quinto e sobraram 12 cruzeiros. Quanto tinha?

71. Forma normal da equação do primeiro grau com uma incógnita. Esta equação, depois de completamente simplificada, se reduz sempre a dois termos; um termo que contém x (a incógnita), e outro que não o contém, isto é, um termo independente da incógnita.

Como os estudantes já o verificaram numerosas vezes, resolvendo equações do primeiro grau com uma incógnita, a penúltima equação a que chegam é $7x=14$, $8x=20$, $3x=-15$, $2x=9$, etc.. De um modo geral se diz em Álgebra que a forma normal das equações do primeiro grau com uma incógnita é

$$ax = b$$

Nesta equação x é a incógnita; a e b são números quaisquer, são os coeficientes; b é o termo independente da incógnita.

De $ax=b$ deduzimos facilmente..... $x = \frac{b}{a}$

Esta é a fórmula resolutiva da equação do primeiro grau com uma incógnita; ela nos diz que:

Estando a equação do primeiro grau com uma incógnita, reduzida à forma normal, para obter o valor de x , isto é, a raiz da equação, é bastante dividir o termo independente de x , pelo coeficiente de x .

Por exemplo, sendo $5x=20$, segue-se que $x=20 \div 5 \dots x=4$.

72. Discussão da fórmula $x = \frac{b}{a}$. Discutir uma fórmula

é atribuir todos os valores possíveis às letras que nela entram e, em seguida, interpretar os resultados obtidos. Façamos, pois, todas as hipóteses possíveis a respeito dos valores que se podem atribuir às letras a e b .

Primeira hipótese: $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Se os coeficientes a e b são diferentes de zero, isto é, se a e b são números quaisquer, inteiros ou fracionários, positivos ou negativos, a fórmula $x = \frac{b}{a}$

nos dá um valor e somente um para x . Com efeito, a divisão de b por a não admite dois quocientes diferentes. Este é o caso mais comum na prática e podemos, portanto, concluir que:

A equação $ax=b$, sendo a e b números diferentes de zero, admite sempre uma raiz, e somente uma. Esta raiz pode ser um número inteiro ou fracionário, positivo ou negativo.

Segunda hipótese: $a \neq 0$ e $b=0$. Neste caso, a equação $ax=b$ admite uma raiz nula, porque o quociente de zero dividido por um número diferente de zero, é zero. Considerando as equações $5x=0$, $8x=0$, $10x=0$, etc., o único valor de x que satisfaz a estas equações é zero.

Terceira hipótese: $a=0$ e $b \neq 0$. Neste caso, a raiz da equação $ax=b$ toma a forma $x = \frac{b}{0}$ (com $b \neq 0$). Ora, a divisão de um número qualquer por zero não é possível; portanto o símbolo $\frac{b}{0}$ não tem significado algum. Mas, se observarmos a equação $0 \times x = 5$, veremos de pronto que ela traduz um absurdo, porque não existe um número que, multiplicado por zero, dê um produto igual a 5; o produto é sempre nulo. O símbolo $\frac{b}{0}$ é, geralmente, o símbolo de impossibilidade.

Portanto, quando a raiz de uma equação se apresenta sob a forma $\frac{m}{0}$, sendo $m \neq 0$, não é possível resolver esta equação.

Entretanto, este símbolo $\frac{m}{0}$ tem, em Matemática, uma interpretação muito interessante.

Consideremos as frações

$$\frac{5}{1}, \frac{5}{0,1}, \frac{5}{0,01}, \frac{5}{0,001}, \frac{5}{0,0001}, \frac{5}{0,00001}, \dots \quad (A)$$

cujos denominadores vão diminuindo sucessivamente.

As frações do grupo (A) podem ser substituídas pelos seus valores calculados, isto é:

$$5, 50, 500, 5000, 50\,000, 500\,000, \dots \quad (B)$$

Portanto, se o numerador de uma fração permanece constante, as sucessões (A) e (B) nos mostram que, à medida que o denominador de uma fração diminui, o valor desta mesma fração aumenta. Donde resulta que, quando o denominador se torna muito pequeno, aproximando-se de zero, o valor da fração torna-se maior do que qualquer número dado, por muito grande que seja este número dado. Este valor limite, que não é possível exprimir numericamente, é chamado *valor infinito* ou simplesmente *infinito*, e é representado simbolicamente por um oito deitado (∞).

E' preciso observar que:

O denominador da fração diminui continuamente, tendendo para zero, mas sem atingir o valor zero, e a fração tende para o limite infinito, sem nunca atingi-lo, mas se aproximando dele cada vez mais.

Em linguagem matemática, diremos:

O limite da fração $\frac{m}{x}$ (com m constante e x variável) quando x tende para zero, é o infinito.

Recorrendo aos símbolos algébricos, traduziremos esse fato pela seguinte notação:

$$\lim. \left(\frac{m}{x} \right)_{x \rightarrow 0} = \infty$$

$$\text{Ou, abreviadamente: } \frac{m}{0} = \infty.$$

Portanto, o infinito pode ser representado, indiferentemente, pela expressão $\frac{m}{0}$ com ($m \neq 0$) ou pelo símbolo ∞ .

Quarta hipótese: $a=0$ e $b=0$. Neste caso, teremos $x = \frac{b}{a} \dots x = \frac{0}{0}$. Este resultado significa que a equação tem uma infinidade de raízes, e é chamado o *símbolo da indeterminação*. Com efeito, a equação toma a forma $0x = 0$, e é, evidentemente uma identidade, pois qualquer número finito multiplicado por zero é igual a zero. Em resumo:

Reduzida a equação do primeiro grau com uma incógnita, à forma normal $ax=b$,

I. Sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a equação tem uma única raiz; é uma equação determinada.

II. Sendo $a \neq 0$ e $b=0$, a raiz da equação é zero; sendo zero um número como outro qualquer, ainda neste caso a equação tem uma única raiz, e é, portanto, uma equação determinada.

III. Sendo $a=0$ e $b \neq 0$, a equação não tem raízes; é uma equação impossível ou absurda.

IV. Sendo $a=0$ e $b=0$, a equação transforma-se em uma identidade; é uma equação indeterminada.

Observação. Sendo $\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n}$, e supondo $m=0$ e $n=0$, resulta $\frac{0}{0} = 0 \times \infty \dots 0 \times \infty = n$ (número qualquer). Portanto, o produto $0 \times \infty$ é também um símbolo de indeterminação.

73. Indeterminações aparentes. Consideremos uma fração algébrica racional em x , isto é, cujos termos, numerador e denominador, são expressões racionais e inteiras em x . Seja

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} \quad (A)$$

esta fração. Calculando o seu valor numérico, para $x=3$, teremos sucessivamente:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3^2 - 7 \times 3 + 12}{3^2 - 5 \times 3 + 6} = \frac{9 - 21 + 12}{9 - 15 + 6} = \frac{0}{0}$$

E concluímos que, para $x=3$, o valor numérico da fração (A) é $\frac{0}{0}$, é indeterminado, é um número qualquer: 5, 8, 12, etc..

Entretanto, esta conclusão é arriscada; pode ser falsa.

Com efeito, se os dois termos da fração (A) se anulam, para $x=3$, conclue-se, de pronto, que ambos são divisíveis exatamente por $x-3$. (§48)

Neste caso, dividindo ambos os termos da fração (A) por $x-3$ ou fatorando-os (§52, 5.º caso) teremos sucessivamente:

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \quad (B)$$

E, nesta última fração, fazendo $x=3$, veremos que o verdadeiro valor da fração (A) é -1 .

Era o fator $x-3$, comum aos dois termos da fração (A) e nulo para $x=3$ que fazia com que esta fração se apresentasse indeterminada. Esta indeterminação era falsa, aparente; suprimindo-se o fator $x-3$, a indeterminação desapareceu.

II. Consideremos a fração racional $\frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 7x + 6} \dots$ e procuremos o seu valor numérico, fazendo $x=1$. Acharemos $\frac{0}{0}$. Esta indeterminação será real ou aparente? Não nos é possível, por enquanto, fatorar os termos da fração dada. Entretanto, se ambos se anulam para $x=1$, concluímos, (§48) que eles são divisíveis (exatamente) por $x-1$, e que a indeterminação é talvez aparente, e produzida pelo fator $x-1$.

Imediatamente dividimos ambos os termos da fração por $x-1$, e teremos $\dots \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

Procurando o valor numérico desta fração, para $x=1$, resulta:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{1 - 3 + 2}{1 + 1 - 6} = \frac{0}{-4} = 0$$

Portanto, para $x=1$, $\frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 7x + 6} = 0$

Se uma fração algébrica, cujos termos são polinômios inteiros e racionais em x , toma a forma $\frac{0}{0}$ para $x=a$, o teorema de d'Alembert nos previne de pronto de que ambos os termos desta fração são divisíveis exatamente por $x-a$; então dividimos os termos da fração por $x-a$, e procuramos o valor numérico da fração resultante, para $x=a$; e assim por diante.

III. Vimos no parágrafo anterior que a expressão $0 \times \infty$ é também um símbolo de indeterminação.

Consideremos a expressão algébrica seguinte:

$$(a^2 + 2a - 15) \times \frac{4}{a^2 + a - 12} \quad (A)$$

Calculando seu valor numérico, para $a=3$, teremos:

$$(9 + 6 - 15) \times \frac{4}{9+3-12} = 0 \times \frac{4}{0} = 0 \times \infty$$

E diremos que, para $a=3$, a expressão A é indeterminada. Mas esta indeterminação será real ou aparente? Escrevendo a expressão A sob a forma

$$\frac{4(a^2+2a-15)}{a^2+a-12}$$

e procedendo como nos casos anteriores (I e II), teremos:

$$\frac{4(a^2+2a-15)}{a^2+a-12} = \frac{4(a+5)(a-3)}{(a+4)(a-3)} = \frac{4(a+5)}{a+4}$$

E nesta última fração, fazendo $a=3$, acharemos $\frac{32}{7}$, que é o verdadeiro valor da expressão A, para $a=3$.

Portanto, a indeterminação da expressão A era aparente; era produzida pelo fator $a-3$ que se anula para $a=3$.

IV. Sendo $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \div \frac{1}{m}$, e supondo $m=0$ e $n=0$, resulta:

$$\frac{0}{0} = \frac{1}{0} \div \frac{1}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty}$$

Portanto, a expressão $\frac{\infty}{\infty}$ é também um símbolo de indeterminação. Entretanto, a indeterminação indicada pelo símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ pode ser, às vezes, aparente.

O símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ aparece quando se quer determinar o valor numérico, para $x=\infty$, de uma fração algébrica cujos termos são polinômios inteiros em x . Dêste caso trataremos oportunamente.

V. Sendo $\frac{m-n}{mn} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$, e supondo $m=0$ e $n=0$, resulta:

$$\frac{0}{0} = \infty - \infty$$

Portanto, as expressões $\frac{0}{0}$ e $\infty - \infty$ são equivalentes, isto é:

$$\infty - \infty = n \text{ (número qualquer)}$$

E a expressão $\infty - \infty$ é também um símbolo de indeterminação. Este símbolo aparece quando se quer calcular o valor numérico de uma diferença entre duas frações algébricas. Neste caso, convém calcular em primeiro lugar, a diferença entre as duas frações, suprimir os fatores comuns a ambos os termos da fração resultante e, depois, calcular-lhe o valor numérico.

Exercícios. Série XLIII

Calcular o verdadeiro valor das expressões algébricas seguintes, de acordo com os valores de x indicados para cada uma delas.

- | | | | |
|------------------------------------|-------------|---|-------------|
| 1. $\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$ | para $x=3$ | 3. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ | para $x=-1$ |
| 2. $\frac{x^2-11x+24}{x^2-10x+16}$ | para $x=8$ | 9. $\frac{x^2+7x+12}{x^2+8x+15}$ | para $x=-3$ |
| 3. $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$ | para $x=2$ | 10. $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+10}$ | para $x=-2$ |
| 4. $\frac{x^2+x-20}{x^2-3x-4}$ | para $x=4$ | 11. $\frac{a^2+ab-6b^2}{a^2+2ab-8b^2}$ | para $a=2b$ |
| 5. $\frac{x^2-3x-28}{x^2-10x+21}$ | para $x=7$ | 12. $\frac{c^2-cd-12d^2}{c^2+cd-20d^2}$ | para $c=4d$ |
| 6. $\frac{x^2-7x+6}{x^2-8x+12}$ | para $x=6$ | 13. $\frac{m^2+am-2a^2}{m^2-2am+a^2}$ | para $m=a$ |
| 7. $\frac{x^2+13x+30}{x^2+8x+15}$ | para $x=-3$ | 14. $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+4xy+3y^2}$ | para $x=-y$ |

74. **Classificação das equações.** (*) Para classificar uma equação é necessário, preliminarmente, passar todos os seus termos para um dos membros da mesma equação, (em geral, para o 1.º membro) de modo que o outro membro fique reduzido a zero; em seguida, reduzem-se os termos semelhantes. A equação toma assim a forma geral $A=0$, na qual A, o primeiro membro da equação, contém a incógnita (ou as incógnitas).

E' sob a forma geral $A=0$, que se classifica uma equação. A classificação de uma equação obedece a vários critérios.

(*) Este parágrafo pode ser omitido em um primeiro estudo, ou desenvolvido gradualmente, de acordo com as necessidades do curso.

Uma equação pode ser classificada pelo número de suas incógnitas. Consideremos as equações seguintes:

$$\begin{array}{l|l|l} 5x-4=3x+4 & \therefore & 3x-y=7+2x & \therefore & x+y-5=2z+3 & \therefore \\ 2x-8=0 & & x-y-7=0 & & x+y-2z-8=0 & \end{array}$$

A primeira é chamada *equação com uma incógnita*; a segunda, *equação com duas incógnitas*; a terceira, *equação com três incógnitas*.

Consideremos a equação.

$$3x-2y+8 = 3x-5z-2y+11 \quad (1)$$

Reduzindo esta equação à forma $A = 0$, teremos sucessivamente:

$$\begin{aligned} 3x-2y+8-3x+5z+2y-11 &= 0 \therefore \\ 5z-3 &= 0 \end{aligned}$$

E assim verificamos que a equação (1) sendo, aparentemente, uma equação com três incógnitas, é, na realidade, uma equação com uma incógnita.

Eis por que, para classificar uma equação, é conveniente dar-lhe a forma geral $A = 0$, com a redução dos termos semelhantes, no 1.º membro.

Observação. Habitualmente representam-se as incógnitas de uma equação pelas últimas letras do alfabeto, x, y, z, t, \dots ; ou por estas letras acentuadas, $x, x', x'', y, y', y'', \dots$ ou afetadas de índices, x_1, x_2, x_3, \dots , etc.. Mas, as exceções são numerosas; em certos casos, as incógnitas podem ser representadas pelas letras $a, b, c, \dots m, n$, etc..

Uma equação pode ser classificada pela natureza das operações a que estão submetidas as incógnitas. Esta é a classificação mais importante.

Voltemos à equação $A = 0$ e suponhamos, para maior simplicidade, que esta equação contém somente uma incógnita, x .

Se, na equação $A = 0$, a incógnita x estiver submetida unicamente às operações elementares, *adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação* (com expoente inteiro ou fracionário) e *radiciação* (com índice inteiro ou fracionário) diremos que a equação $A = 0$ é uma *equação algébrica propriamente dita* ou, abreviadamente, *equação algébrica*.

Por exemplo, as equações

$$x^3 + 2x - 2 = 0$$

$$\sqrt{x} - x + 1 = 0$$

$$x^{\frac{3}{2}} + x - 1 = 0 \therefore \sqrt{x^3} + x - 1 = 0 \quad (\S 40)$$

$$x^{-2} + 2x - 4 = 0 \therefore \frac{1}{x^2} + 2x - 4 = 0 \quad (\S 39)$$

$$2 + \frac{1}{x-1} - 3x = 0$$

são equações algébricas.

Se, na equação $A = 0$, a incógnita x estiver submetida a operações transcendentais (*) diremos que a equação $A = 0$ é uma *equação transcendente*.

As equações algébricas podem ser *racionais ou irracionais*.

São *racionais*, quando a incógnita x está submetida somente a operações racionais, isto é, *adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação* (com expoente inteiro).

São *irracionais*, quando a incógnita x está submetida a uma *radiciação* ou, o que é a mesma coisa, a uma *potenciação* com expoente fracionário.

As equações $x^2 + 3x - 1 = 0$

$$x^3 - \frac{1}{1-x} + 2 = 0$$

$$x^2 \sqrt{2} + x - 1 = 0$$

$$x^{-2} + x - 1 = 0$$

são racionais.

No 3.º exemplo, $\sqrt{2}$ é um valor numérico que não influe na classificação da equação; não é a incógnita que está sujeita à extração da raiz quadrada. Observemos também, em relação ao 4.º exemplo, que $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. (§ 39)

(*) Não é possível exemplificar, neste parágrafo, as equações transcendentais. Os primeiros exemplos destas equações, isto é, *equações trigonométricas e equações exponenciais* serão apresentados depois da 4.ª série ginasial.

Consideremos a equação $\sqrt[3]{x^6} + 3x - 1 = 0$

Parece ser irracional, mas não é, porque $\sqrt[3]{x^6} = x^2$. (§ 34)
Verificamos assim, mais uma vez que, para bem classificar uma equação, é indispensável efetuar todas as simplificações possíveis.

As equações $\sqrt{1-x} + x - 1 = 0$
 $x^{\frac{1}{3}} + 2x - 3 = 0 \quad \therefore \quad \sqrt[3]{x} + 2x - 3 = 0$

são irracionais.

Por sua vez, as equações *racionais* se dividem em duas categorias: **equações inteiras** e **equações fracionárias**.

Uma equação racional é inteira, quando a incógnita não figura como denominador. É fracionária, quando figura como denominador.

As equações $x^2 + x + 1 = 0$
 $x^2 - \frac{2}{(1-x)^2} + 1 = 0 \quad \therefore \quad x^2 - 2(1-x)^2 + 1 = 0$

são inteiras.

As equações $x + \frac{1}{x-1} - 3 = 0$
 $(x-1)^{-2} + 3 = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{(x-1)^2} + 3 = 0$

são fracionárias.

Finalmente, as equações inteiras (e, portanto, racionais) podem ser de *graus diferentes*. O grau de uma equação inteira é determinado pelo expoente mais alto da incógnita (ou das incógnitas). Assim, as equações

$$\begin{array}{l|l} 2x - 3 = 0 & x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 & x^5 - 1 = 0 \end{array}$$

são, respectivamente, do 1.º, do 2.º, do 4.º e do 5.º grau em x .

Consideremos a equação

$$x^2 = x(x-1) + 3 \quad (1)$$

Reduzindo-a à forma $A = 0$, acharemos

$$x - 3 = 0$$

Portanto, a equação (1) que parece ser do 2.º grau é, na realidade, do 1.º grau.

Em resumo, as equações algébricas se classificam de acordo com o quadro seguinte:

$$\text{equações algébricas} \begin{cases} \text{racionais} & \begin{cases} \text{inteiras} & \begin{cases} \text{do 1.º grau} \\ \text{do 2.º grau} \\ \text{do 3.º grau} \\ \text{do 4.º grau, etc..} \end{cases} \\ \text{fracionárias} \end{cases} \\ \text{irracionais} \end{cases}$$

Neste capítulo estudamos somente a resolução das equações algébricas, racionais e inteiras do 1.º grau, com uma incógnita.

75. Equações de grau superior ao primeiro. A dificuldade da resolução de uma equação aumenta com o grau da mesma equação. Mais tarde estudaremos na quarta série ginasial, o método geral para resolver as equações do 2.º grau. Entretanto, a fatoração algébrica (§ 53) nos permite resolver com facilidade algumas equações de grau superior ao primeiro.

I. Resolver a equação $x^2 - 11x + 24 = 0$.

Fatorando o primeiro membro desta equação, teremos:

$$(x-3)(x-8) = 0 \quad (A)$$

O segundo membro da equação A é zero; o valor ou os valores de x devem ser tais que, substituídos no primeiro membro, o anulem, o reduzam a zero. Mas o primeiro membro, $(x-3)(x-8)$, é um produto. E, para que um produto seja nulo, é bastante que um dos fatores seja nulo.

Portanto, o primeiro membro da equação ficará reduzido a zero se tivermos:

$$\begin{array}{l} x-3=0 \quad \therefore \quad x=3 \\ x-8=0 \quad \therefore \quad x=8 \end{array}$$

E assim verificamos que a equação A tem duas raízes, 3 e 8, e que distinguiremos uma da outra dizendo $x'=8$ e $x''=3$.

II. Resolver a equação $x^2 + 5x - 14 = 0$.

Fatorando o primeiro membro..... $(x+7)(x-2)=0$

Igualando a zero cada um dos fatores,

$$\begin{array}{l} x+7=0 \quad \therefore \quad x=-7 \\ x-2=0 \quad \therefore \quad x=+2 \end{array} \quad \text{R. } \begin{cases} x' = +2 \\ x'' = -7 \end{cases}$$

III. Resolver a equação $x^2=9$. Passando 9 para o primeiro membro e fatorando, teremos:

$$\begin{array}{l} x^2-9=0 \quad \dots \quad (x+3)(x-3)=0 \quad \dots \\ x+3=0 \quad \dots \quad x=-3 \\ x-3=0 \quad \dots \quad x=+3 \end{array} \quad \text{R. } \begin{cases} x' = +3 \\ x'' = -3 \end{cases}$$

Observação. É fácil compreender que, sendo $x^2=9$, a raiz desta equação pode ser $+3$ ou -3 .

IV. Resolver a equação $x^2-10x+25=0$.

Fatorando o primeiro membro, $\dots \dots (x-5)(x-5)=0 \quad \dots$

$$\begin{array}{l} x-5=0 \quad \dots \quad x=5 \\ x-5=0 \quad \dots \quad x=5 \end{array} \quad \text{R. } \begin{cases} x' = +5 \\ x'' = +5 \end{cases}$$

Observação. Na verdade a equação $x^2-10x+25=0$ tem apenas uma raiz que é 5. Mas a equação do segundo grau com uma incógnita tem em geral duas raízes; eis por que, quando acontece que as duas são iguais, nós escrevemos, como no caso presente, $x'=5$ e $x''=5$. E dizemos, em Matemática, que a equação dada tem *uma raiz dupla*.

V. Resolver a equação $x^2-5x=0$.

Fatorando o primeiro membro, $\dots \dots x(x-5)=0 \quad \dots$

$$\begin{array}{l} x=0 \quad \dots \quad x=0 \\ x-5=0 \quad \dots \quad x=5 \end{array} \quad \text{R. } \begin{cases} x' = 5 \\ x'' = 0 \end{cases}$$

VI. Resolver a equação $x^3+x^2-4x-4=0$.

Fatorando o primeiro membro (por agrupamento),

$$\begin{array}{l} (x^2-4)(x+1)=0 \quad \dots \\ (x+2)(x-2)(x+1)=0 \quad \dots \\ x+2=0 \quad \dots \quad x=-2 \\ x-2=0 \quad \dots \quad x=+2 \\ x+1=0 \quad \dots \quad x=-1 \end{array} \quad \text{R. } \begin{cases} x' = +2 \\ x'' = -1 \\ x''' = -2 \end{cases}$$

Exercícios. Série XLIV

Resolver pela fatoração as equações seguintes:

- | | | |
|-----------------------|----------------------|--------------------|
| 1. $x^2+11x+24=0$ | 6. $x^2+5x+6=0$ | 11. $x^2-8x-20=0$ |
| 2. $x^2-7x+10=0$ | 7. $x^2-8x+12=0$ | 12. $x^2+3x+2=0$ |
| 3. $x^2+6x-7=0$ | 8. $x^2-7x+6=0$ | 13. $x^2-17x+30=0$ |
| 4. $x^2-3x-28=0$ | 9. $x^2+11x-12=0$ | 14. $x^2-13x+30=0$ |
| 5. $x^2+13x+12=0$ | 10. $x^2-9x-36=0$ | 15. $x^2-16x+15=0$ |
| 16. $x^2-8x^2+12x=0$ | 19. $x^3-7x^2+12x=0$ | |
| 17. $x^3-13x^2+12x=0$ | 20. $3x^3-24x+36=0$ | |
| 18. $x^3+5x^2-84x=0$ | 21. $4x^2+12x+8=0$ | |

CAPÍTULO VI

Geometria Dedutiva

76. *Proposições geométricas. Proposição é a expressão de um juízo por meio de palavras.* (Lógica, de J. Balmes). Por exemplo:

I. O homem é um ser mortal.

II. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.

III. Se quatro números formam uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. (E.M.S.V. §61)

IV. Se $x=y$ e $x'=y'$ resulta que $x+x'=y+y'$, $x-x'=y-y'$, $x \times x'=y \times y'$, $x:x'=y:y'$.

V. Um número é divisível por 9, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 9.

Entre as proposições estudadas em Matemática devemos lembrar os *axiomas* e os *teoremas*.

Axioma ou postulado é a proposição aceita sem demonstração.

A palavra *postulado* é derivada do verbo latino *postulare*, que significa *pedir*. O postulado é uma proposição, cuja aceitação se *pede* e não se *prova*.

Teorema é a proposição que se *demonstra*. Nós não aceitamos as proposições III e V, sem a necessária prova.

No enunciado de um teorema há a considerar duas partes: *hipótese* e *tese*. A hipótese é a suposição, é o ponto de partida; a tese é a conclusão a que se quer chegar, é aquilo que se pretende provar. Consideremos a proposição III; é um teorema porque exige prova; nós não aceitamos esta verdade matemática sem uma prova. Neste teorema a hipótese é que nós temos quatro números formando proporção, isto é, $a:b::c:d$. A tese, isto é, aquilo que exigimos que nos provem, é que o produto *ad* é igual ao produto *bc*.

Teorema recíproco de um teorema dado ou, simplesmente recíproca de um teorema dado, é o teorema que se obtém tomando a tese do teorema dado como hipótese e a hipótese como tese. Assim, em relação à proposição III, a recíproca é a seguinte:

VI. *Se o produto de dois números é igual ao produto de outros dois, estes quatro números formam uma proporção, colocando os fatores do primeiro produto nos extremos (ou nos meios) e os fatores do segundo produto nos meios (ou nos extremos).*

Nesta proposição, a hipótese é que nós temos dois produtos iguais ad e bc . A tese é que estes quatro fatores formam a proporção $a : b :: c : d$.

Para distingui-lo da sua recíproca, o teorema primitivo, isto é, a proposição III no caso presente, será chamado *teorema direto*.

Teorema contrário de um teorema dado é o teorema que se obtém, negando a hipótese e, logicamente, a tese do teorema dado. Assim, em relação à proposição III, o teorema contrário é o seguinte:

VII. *Se quatro números não formam uma proporção, o produto dos extremos não é igual ao produto dos meios.*

Nesta proposição, a hipótese é que a razão $a : b$ não é igual à razão $c : d$. A tese é que o produto ad não é igual ao produto bc .

Teorema contrário de um teorema recíproco é o teorema que se obtém negando a hipótese e, logicamente, a tese do teorema recíproco. Assim, em relação à recíproca da proposição III, isto é, em relação à proposição VI, o teorema contrário é o seguinte:

VIII. *Se o produto de dois números não é igual ao produto de outros dois, estes quatro números não formam uma proporção, colocando os fatores do primeiro produto nos extremos (ou nos meios) e os fatores do segundo produto nos meios (ou nos extremos).*

Nesta proposição, a hipótese é que o produto ad não é igual ao produto bc . A tese é que a razão $a : b$ não é igual à razão $c : d$.

A proposição III, sua recíproca VI, e os dois teoremas contrários VII e VIII, podem ser resumidos no quadro seguinte:

teorema direto	III	$\left[\begin{array}{l} \text{H. } \{ a : b :: c : d \\ \text{T. } \{ ad = bc \end{array} \right]$
teorema recíproco	VI	$\left[\begin{array}{l} \text{H. } \{ ad = bc \\ \text{T. } \{ a : b :: c : d \end{array} \right]$
teorema contrário do direto	VII	$\left[\begin{array}{l} \text{H. } \left\{ \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \right. \\ \text{T. } \{ ad \neq bc \end{array} \right]$
teorema contrário do recíproco	VIII	$\left[\begin{array}{l} \text{H. } \{ ad \neq bc \\ \text{T. } \left\{ \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \right. \end{array} \right]$

Do exame dêste quadro resulta que o teorema contrário do recíproco é o recíproco do teorema contrário do direto.

Parece à primeira vista que, se uma proposição é verdadeira, sua recíproca também o é. Nem sempre. Assim, considerando a proposição I, a recíproca seria: *Todos os seres mortais são homens*, o que não é verdade. Aprendemos em Aritmética que, quando um número divide as parcelas, também divide a soma. Entretanto, a recíproca nem sempre é verdadeira. Por exemplo, o número 3 divide a soma 12, mas não divide as parcelas 5 e 7 desta mesma soma.

No decorrer destas lições encontraremos muitas recíprocas que não são verdadeiras.

77. O método dedutivo. O método dedutivo é o empregado na Matemática, e, particularmente, na Geometria. O professor de Geometria nos diz: *A soma dos ângulos (internos) de um quadrilátero é igual a quatro ângulos retos.* (§111). Ora, esta verdade não é bastante afirmá-la; é preciso também prová-la. Mas, para provar esta verdade, é indispensável que o professor tenha provado aos seus alunos esta outra verdade: *A soma dos três ângulos (internos) de um triângulo é igual a dois ângulos retos.* (§109). Mas, esta segunda verdade depende, por sua vez, de outras verdades que deverão ter sido provadas anteriormente. (§103). E assim sucessivamente.

Vemos pois que as verdades da Geometria formam uma cadeia cujos elos são aprendidos cada um por sua vez; *estas verdades se*

deduzem umas das outras pelo raciocínio; estabelecido que o teorema A é verdadeiro, prova-se o teorema B; sendo A e B verdadeiros, prova-se o teorema C; e assim por diante.

Mas, como começar? Qual será o ponto de partida para provar, para demonstrar todos os teoremas da Geometria? É muito simples; é necessário estabelecer um conjunto de axiomas ou postulados para deles deduzir logicamente todos os teoremas da Geometria; estes axiomas, convenientemente escolhidos, nos auxiliarão a construir o edifício lógico que é a **Geometria Dedutiva**.

Assim, o método dedutivo consiste em encadear, pelo raciocínio, todas as verdades de modo que qualquer delas decorra das precedentes e unicamente destas.

O método dedutivo foi empregado nas ciências matemáticas desde a mais remota antiguidade; estas ciências podem ser consideradas como as ciências dedutivas por excelência e particularmente a Geometria, cuja elaboração como sistema dedutivo é devida aos gregos (do V ao III século A.C.). A Geometria racional que aprendemos hoje no curso secundário é, com ligeiras modificações e acréscimos, a Geometria que Euclides, famoso matemático grego, escreveu em Alexandria, provavelmente no período 306-283 A. C., durante o reinado de Ptolomeu I.

Do livro de Euclides, que se chamava *Elementos*, foram tiradas umas 1500 edições, sendo a obra mais difundida depois da Bíblia. (H. Wieleitner). Os espanhóis, porém, opinam que o segundo lugar, relativamente ao número de edições, cabe ao famoso *D. Quichote*, a obra imortal de Cervantes.

78. Métodos de demonstração. A demonstração de um teorema é o trabalho intelectual necessário para provar este mesmo teorema. Existem, em Matemática, milhares e milhares de teoremas; entretanto, poucos são os métodos necessários para demonstrá-los. Entre os mais empregados citaremos, por enquanto, os seguintes:

- a) Demonstração direta.
- b) Demonstração por absurdo.

O primeiro método consiste em tomar a hipótese e, com o auxílio de definições, axiomas e teoremas já demonstrados, dela deduzir a tese ou conclusão a que se quer chegar.

O segundo método consiste em negar a tese de todos os modos possíveis e verificar que, a cada negação da tese corresponde um absurdo, isto é, uma negação da hipótese. Ora, se cada negação da tese nos conduz a um absurdo, forçoso é aceitá-la.

Para exemplificar o primeiro processo vamos tomar a proposição III. (§ 76) (*)

$$H. \{ a : b :: c : d$$

$$T. \{ ad = bc$$

Por hip. os números a, b, c, d formam uma proporção. Ora, lembrando a definição de uma proporção, podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1)$$

Multiplicando-se ambos os membros desta igualdade pelo mesmo número bd , os dois produtos constituem ainda uma igualdade, em virtude do princípio da multiplicação. (§ 66) Então, da igualdade (1) resulta:

$$\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d} \quad (2)$$

Dividindo-se ambos os termos de uma fração por um mesmo número, o valor da fração não se altera, em virtude de um conhecido teorema de Aritmética.

Aplicando-se este teorema à igualdade (2) resulta:

$$ad = bc \quad (3)$$

Ora, a igualdade (3) é justamente a nossa tese. É esta demonstração nós a fizemos, tomando a hip. e aplicando-lhe sucessivamente uma definição, um axioma e um teorema.

Para exemplificar o segundo processo, voltemos à mesma proposição.

$$H. \{ a : b :: c : d$$

$$T. \{ ad = bc$$

De acordo com a tese, o produto ad é igual ao produto bc . Ora, só há um modo de negar a tese: é afirmar que estes dois produtos são diferentes. Suponhamos que

$$ad > bc \quad (1)$$

(*) Evidentemente, não podemos, por ora, exemplificar com um teorema de Geometria.

Dividindo-se ambos os membros desta desigualdade por um mesmo número positivo bd , os dois quocientes formarão ainda uma desigualdade do mesmo sentido que a desigualdade (1) em virtude de um teorema de Álgebra que aprenderemos oportunamente. Aplicando-se este teorema à desigualdade (1) resulta :

$$\frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \quad (2)$$

De (2) aplicando-se um conhecido teorema de Aritmética, resulta :

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad (3)$$

Portanto, a razão $\frac{a}{b}$ é maior que a razão $\frac{c}{d}$. Mas isto é um absurdo porque, por hip. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ora, se a negação da tese nos conduziu a um absurdo, e não havendo outro meio de negá-la, é forçoso aceitá-la.

Observação Partindo da desigualdade $ad < bc$, facilmente se provará que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Em Geometria, o método mais empregado para demonstrar teoremas é o método direto. E, para que o estudante consiga bons resultados com a adoção desse método, deve obedecer aos preceitos seguintes :

- a) Entender claramente aquilo que pretende demonstrar.
- b) Separar nitidamente a hipótese da tese.
- c) Examinar minuciosamente a hipótese, refletir bastante sobre o seu conteúdo e sobre os fatos anteriores que ela pode evocar em seu espírito, para dela tirar o maior partido possível.
- d) Partindo da hipótese, caminhar cautelosamente para alcançar a tese, com o auxílio de definições, axiomas e teoremas anteriormente demonstrados.

Este último preceito é o mais difícil na aplicação ; consegue-se com numerosos exercícios, e com o auxílio de algumas regras que serão conhecidas oportunamente.

Exercícios em classe. Demonstrar diretamente e por absurdo, as proposições III, VI, VII e VIII do § 80.

79. O ponto, a reta e o plano. São os conceitos fundamentais da Geometria, também chamados **conceitos primitivos ou noções primitivas**. Dêles já nos ocupámos desenvolvidamente em nosso E.M.P.V. §§ 1 a 18, e que os estudantes devem reler cuidadosamente.

As noções de ponto, reta e plano são intuitivas, isto é, delas temos um conhecimento direto e imediato, sem que seja preciso definí-las.

A estes três conceitos fundamentais da Geometria, devemos juntar também o *sólido geométrico*, que não é um conceito primitivo, visto que é necessário definí-lo. (E.M.P.V. § 4)

Dois pontos se distinguem um do outro pela sua posição, e nada mais.

Já vimos também que as principais propriedades da reta são :

a) Por dois pontos dados, A e B, podemos traçar sempre uma reta, e somente uma. O que equivale a dizer que : Dois pontos determinam uma reta, e somente uma. Desta propriedade resulta :

Duas retas AB e A'B', tendo dois pontos comuns, coincidem em toda a sua extensão.

b) Por um ponto dado podemos traçar uma infinidade de retas. Uma infinidade de retas significa tantas retas quantas quisermos. Portanto, um ponto de uma reta não é bastante para determinar esta mesma reta.

Axioma. Em uma reta existem uma infinidade de pontos.

Duas retas se distinguem uma da outra pela sua posição, e nada mais.

A propriedade característica do plano, e que se aceita como um axioma (ou postulado) é a seguinte :

Se um plano contém dois pontos de uma reta, contém a reta toda.

Dois planos se distinguem um do outro pela sua posição, e nada mais.

Axiomas relativos ao plano. Os principais são os seguintes :

- I. Em um plano podemos traçar uma infinidade de retas.
- II. Existem tantos planos quantos quisermos.
- III. Três pontos dados e não situados em linha reta determinam um plano, e somente um.

Do axioma III resultam os seguintes corolários:

I. Uma reta AB, e um ponto M situado fora da reta, determinam um plano, e somente um.

Com efeito, tomemos dois pontos C e D na reta AB; os pontos C, D e M, não situados em linha reta, determinam um plano, e somente um. (axioma III)

II. Duas retas que se cortam determinam um plano, e somente um.

Observação. As noções de semirreta e segmento também já são conhecidas. (E.M.P.V. § 14)

80. Figuras geométricas. A figura geométrica é um conjunto de elementos geométricos, isto é, pontos, linhas, superfícies e sólidos.

A figura geométrica mais simples é o ponto.

Duas figuras geométricas podem ser *semelhantes*, *equivalentes* ou *iguais*.

São semelhantes quando têm a mesma forma. Por exemplo, dois quadrados cujos lados medem respectivamente 4m e 7m, duas circunferências cujos raios medem respectivamente 5m e 8m, são figuras semelhantes.

São equivalentes quando têm a mesma extensão. Por exemplo, um quadrado cujo lado mede 6m e um retângulo cujas dimensões respectivas são 9m e 4m, são figuras equivalentes; um cubo cuja aresta mede 8m e um bloco retangular cujas dimensões são 4m, 8m e 16m, são também figuras equivalentes.

São iguais quando têm a mesma forma e a mesma extensão.

Figura geométrica plana ou, simplesmente, figura plana é a figura cujos pontos estão todos situados em um mesmo plano.

O triângulo é uma figura plana. (§ 79)

Postulado da superposição. Uma figura geométrica pode deslocar-se no plano ou no espaço, e de um modo qualquer, sem que a sua forma e a sua extensão se alterem.

Para provar a igualdade de duas figuras geométricas, coloca-se uma sobre a outra. Se elas coincidirem em toda a sua extensão, diremos que são iguais.

Observação. A coincidência de duas figuras geométricas pode ser feita experimentalmente ou pelo raciocínio.

Todos os pontos são iguais; todas as retas são iguais; todos os planos são iguais.

81. Divisão da Geometria. A Geometria divide-se em duas partes:

a) **Geometria Plana**

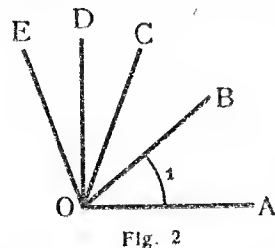
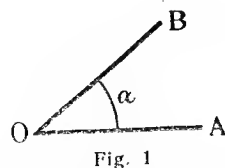
b) **Geometria Sólida ou Geometria no Espaço**

A primeira estuda as figuras planas; a segunda estuda as figuras não planas.

Observação. Certas figuras e, particularmente, certas linhas como a mediatriz de um segmento retilíneo, a bissetriz de um ângulo, a circunferência, etc., gozam de determinadas propriedades, pelo que se denominam **lugares geométricos**. Destas figuras trataremos oportunamente, isto é, quando for possível exemplificar.

A Reta

82. Ângulos. *Ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas distintas que têm a mesma origem.* A figura AOB (fig. 1) é um \angle (*). As semirretas OA e OB são os lados do ângulo, e o ponto O, origem comum das semirretas, é o vértice do ângulo. Para ler um \angle enunciam-se as três letras da figura, tendo, porém, o cuidado de enunciar em segundo lugar a letra do vértice. Portanto, é erro dizer $\angle ABO$ ou $\angle BAO$ (fig. 1); é necessário dizer $\angle AOB$ ou $\angle BOA$. Poderíamos também ler um \angle , enunciando apenas a letra do vértice, isto é, dizendo $\angle O$. Entretanto, este



segundo modo de ler um ângulo pode produzir confusão, como acontece, por exemplo, com a figura geométrica formada pelas cinco semirretas OA, OB, OC, OD e OE (fig. 2). Neste caso é preferível ler um \angle enunciando as três letras na ordem acima indicada.

Há um modo mais simples de ler ou indicar um \angle ; é colocar uma letra minúscula ou um número no interior do mesmo. Assim, diremos $\angle \alpha$ (alfa, primeira letra do alfabeto grego) em lugar de $\angle AOB$ (fig. 1); $\angle 1$, em lugar de $\angle AOB$ (fig. 2).

Um \angle é também uma grandeza e, como tal, pode ser avaliado ou medido. Mas a grandeza de um \angle não consiste na superfície plana compreendida entre seus lados porque duas semirretas não bastam, evidentemente, para fechar, limitar uma porção de plano. Também não consiste no comprimento de seus lados, por-

(*) Convém lembrar que, salvo aviso em contrário, nos referiremos sempre ao ângulo convexo. (E.M.P.V. §19).

que estes são semirretas, isto é, têm origem, mas não têm extremidade. O comprimento de cada um dos lados de um \angle é ilimitado.

Para termos a noção exata da grandeza de um \angle , imaginemos uma semirreta fixa, OA, e uma semirreta móvel, OB, colocada sobre a primeira, tendo ambas a mesma origem, o ponto O,



Fig. 3



Fig. 4

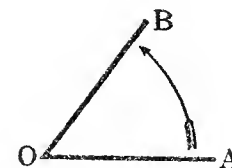


Fig. 5

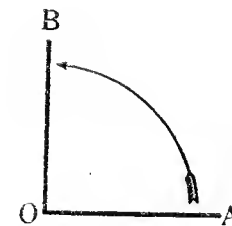


Fig. 6

e o mesmo sentido. Estando as duas semirretas nesta posição (fig. 3) diremos que elas formam um *ângulo nulo*. Agora façamos a semirreta OB girar em torno do ponto O, no plano em que estão situadas, como se fosse um ponteiro de relógio, e no sentido indicado pela seta; o $\angle AOB$, que era nulo (fig. 3) começa a crescer. (figs. 4, 5 e 6) Quando as duas semirretas ficam dirigidas em sentidos opostos, formando uma reta (fig. 7), dizemos em Geometria que elas estão formando um *ângulo raso* ou *ângulo direito* ou *ângulo de meia volta*.

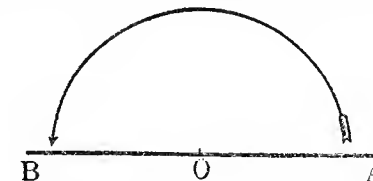


Fig. 7

Continuando a semirreta OB a executar o seu movimento de rotação, o \angle continua a crescer.

(figs. 8, 9 e 10) Finalmente, a semirreta OB volta a coincidir com a semirreta OA. (fig. 11) E diremos, neste caso, que as semirretas OA e OB estão formando um *ângulo giro* ou *ângulo de uma volta* ou *perígono*.

Os \angle podem ser convexos ou côncavos.

Ângulo convexo é o ângulo menor que o ângulo de meia volta. (figs. 4, 5 e 6)

Ângulo côncavo é o ângulo maior que o ângulo de meia volta e menor que o ângulo de uma volta. (figs. 8, 9 e 10)

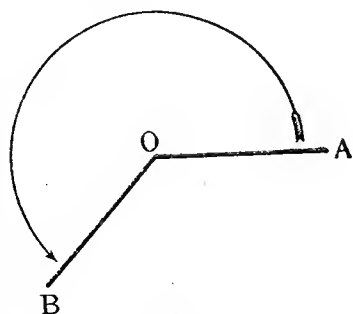


Fig. 8

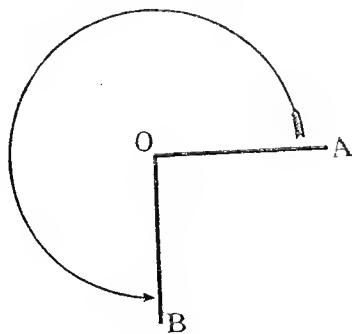


Fig. 9

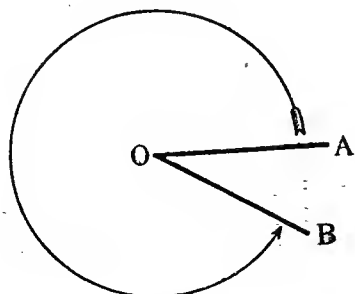


Fig. 10

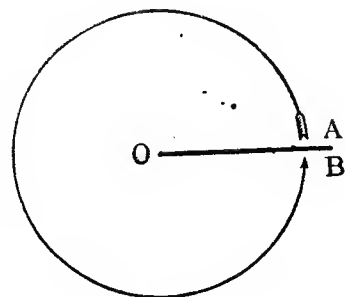


Fig. 11

Observação. Em Geometria, o menor de todos os \angle é o \angle nulo (fig. 11); o maior é o \angle de uma volta. (fig. 10)

Já aprendemos em que consiste a igualdade ou desigualdade de \angle e como se medem. (E.M.P.V. §§ 21 e 22)

Amplitude de um ângulo é o número que exprime a grandeza d'êste mesmo ângulo.

Assim, a amplitude do \angle AOB (fig. 4) é, por exemplo, 40° ; a do \angle AOB (fig. 6) é, por exemplo, 90° ; etc..

83. Ângulos adjacentes. Dois ângulos são adjacentes quando têm o mesmo vértice, um lado comum, e estão situados de um lado e do outro do lado comum.

Consideremos os \angle AOB e BOC. (fig. 12) Ambos têm o mesmo vértice, o ponto O, um lado comum, o lado OB; entretanto, estão situados de um lado e do outro do lado comum OB. São, portanto, \angle adjacentes. Quando dois \angle são adjacentes, os lados não comuns, OA e OC, são chamados *lados exteriores*.

Observação. Pela definição de \angle adjacentes, os \angle AOB e AOC ou BOC e AOC não são adjacentes.

Na figura 12 temos três \angle distintos: os \angle 1, 2 e 3. Em relação a êstes três \angle podemos escrever:

$$\hat{3} = \hat{1} + \hat{2} \quad \hat{1} = \hat{3} - \hat{2} \quad \hat{2} = \hat{3} - \hat{1}$$

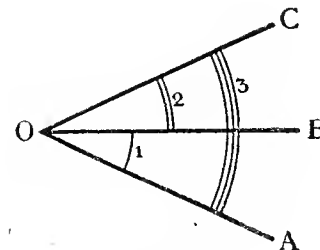


Fig. 12

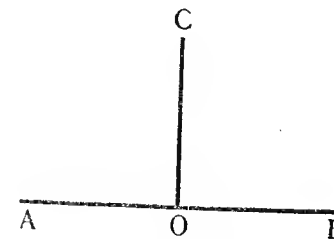


Fig. 13

Dada uma reta AB (fig. 13) tracemos, por um ponto qualquer, O, desta reta, uma semirreta OC. A semirreta OC forma com a reta AB, dois \angle adjacentes que podem ser iguais ou desiguais.

Uma semirreta OC (fig. 13) é perpendicular a uma reta AB, quando forma com esta reta dois ângulos adjacentes iguais. O ponto O é chamado *pé da perpendicular*.

Os \angle AOC e BOC são chamados *ângulos retos* ou simplesmente, *retos*.

As semirretas OA e OB (fig. 13) formam um \angle raso ou \angle de meia volta. (§ 86) Os \angle AOC e BOC sendo iguais, concluímos de pronto que:

O ângulo reto é a metade de um ângulo de meia volta ou ângulo raso.

Todos os \angle retos são iguais.
(E.M.P.V. § 21)

Uma semirreta OC (fig. 14) é oblíqua a uma reta AB, quando forma com esta reta dois ângulos adjacentes desiguais. O ponto O é chamado *pé da oblíqua*.

Os \angle adjacentes AOC e BOC são chamados *ângulos oblíquos*. Pelo

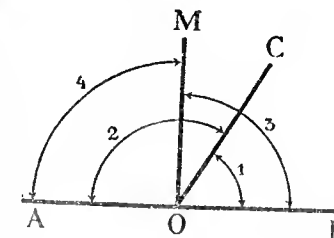


Fig. 14

ponto O tracemos $OM \perp AB$; já sabemos que os $\angle 3$ e 4 são iguais e são chamados *retos*. O $\angle 1$ menor que o $\angle 3$, é um \angle agudo; o $\angle 2$ maior que o $\angle 4$ é um \angle obtuso.

Ângulo agudo é o ângulo oblíquo menor que o ângulo reto.

Ângulo obtuso é o ângulo oblíquo maior que o ângulo reto e menor que o ângulo de meia volta.

Para concluir este parágrafo vamos demonstrar o seguinte

TEOREMA. *Por um ponto dado em uma reta dada é sempre possível traçar uma semirreta perpendicular à reta dada, e somente uma.*

Sejam AB e O, a reta e o ponto dados. Pelo ponto O tracemos uma semirreta qualquer OC. Se esta semirreta formar com AB dois \angle adjacentes iguais, ela será \perp à reta AB, e o teorema estará demonstrado. Entretanto, se a semirreta OC não formar com AB, dois \angle adjacentes iguais, é evidente que, fazendo a semirreta OC girar em torno do ponto O, como um ponteiro de relógio, no plano da figura, e em sentido conveniente, os dois \angle adjacentes tornar-se-ão iguais, e teremos $OC \perp AB$.

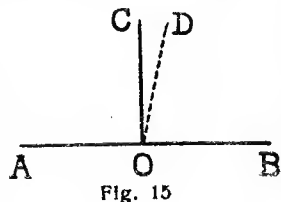


Fig. 15

Resta provar que, pelo ponto O, não podemos traçar outra semirreta \perp AB. Suponhamos que OC e OD são \perp AB.

Sendo $OC \perp AB$, $\hat{A}OC = \hat{B}OC$. Logo, é evidente que $\hat{A}OD > \hat{B}OD$. Mas, neste caso, OD não é \perp AB.

Sendo $OD \perp AB$, $\hat{A}OD = \hat{B}OD$. Logo, é evidente que $\hat{A}OC < \hat{B}OC$. Mas, neste caso, OC não é \perp AB.

Portanto, pelo ponto O, da reta AB, não é possível traçar mais do que uma semirreta \perp à reta AB.

34. A medida dos ângulos. O \angle é uma grandeza e já sabemos em que consiste a grandeza de um \angle . (§82) Para avaliar um \angle é necessário compará-lo com outro \angle tomado como unidade. Ora, desde que todos os \angle retos são iguais, a unidade de \angle , a *unidade angular*, se impõe; é o *ângulo reto*. Vamos medir, por exemplo, o \angle MNP. (fig.16) Precisamos compará-lo

com o \angle reto ABC, que é a unidade de \angle . Sendo o \angle MNP menor do que a unidade, dividimos esta em um número qualquer de partes iguais, por exemplo, em 10. E seja o \angle ABD ou $\angle a$, um décimo da unidade. Se o $\angle a$ couber 7 vezes no \angle MNP, diremos que o \angle MNP é igual a 0,7 do \angle reto e escreveremos:

$$MNP = 0,7 \text{ de um reto.}$$

Em geral, o \angle que se quer medir é menor do que a unidade, isto é, o \angle reto. Daí a necessidade de se dividir, quasi sempre, o \angle reto, em um certo número de partes iguais. Na prática é costume dividir o \angle reto

em 90 partes iguais chamadas *graus*. Portanto, um \angle de um grau é um \angle igual a $1/90$ (um nonagésimo) do \angle reto. Se um $\angle A$ mede 37 graus, 28 minutos e 36 segundos, escreveremos abreviadamente:

$$\hat{A} = 37^\circ 28' 36''$$

Existem outras unidades para medir \angle . (E.M.S.V. § 27)

Observação. É provável que alguns estudantes observem a analogia existente entre as divisões da O e as do \angle reto. Oportunamente será dada a explicação necessária.

O ângulo nulo mede zero graus ou zero grados; o ângulo raso ou ângulo de meia volta mede 180 graus ou 200 grados; o ângulo giro mede 360 graus ou 400 grados. (*)

85. Soma de ângulos. Na fig. 16 o ângulo ABC, formado pelos lados não comuns dos ângulos adjacentes ABD e CBD, chama-se *soma* desses dois ângulos.

Dados dois ângulos a e CBD (fig. 16), para obter a soma, deslocaremos o ângulo a de modo que fique adjacente a CBD, como mostra a figura 16, e o ângulo ABC, formado pelos lados exteriores, será a *soma*.

86. Ângulos complementares e suplementares. Dois ângulos são *complementares*, quando sua soma é igual a um ângulo reto.

(*) Para a noção de soma e diferença de ângulos, convém ler E. M. P. V. §§ 23 e 25.



Fig. 16

Da definição de \angle compls. resulta imediatamente que é somente o \angle agudo que tem complemento. Os \angle retos e obtusos não têm complemento. E desde que, complemento de um \angle é o que lhe falta para ser um \angle reto, resulta também que um \angle não pode ter dois complementos diferentes. Por exemplo, dado um \angle de 65° , o seu complemento é um \angle de 25° . O complemento de um \angle é uma grandeza perfeitamente definida.

Já aprendemos a construir ou calcular o complemento de um \angle . (E.M.P.V. § 25)

Dois ângulos são suplementares quando sua soma é igual a dois retos, ou um ângulo de meia volta.

Desta definição resulta que um \angle qualquer, agudo, reto ou obtuso, tem suplemento. O suplemento de um \angle reto é, evidentemente, um \angle reto; o de um \angle agudo é um \angle obtuso, e o de um \angle obtuso é um \angle agudo. E desde que, suplemento de um \angle é o que lhe falta para dois \angle retos, resulta também que um \angle não pode ter dois suplementos diferentes. Por exemplo, dado um \angle de 125° , o seu suplemento é um \angle de 55° . O suplemento de um \angle é uma grandeza perfeitamente definida.

Seja o \angle AOB. (fig. 17) De duas maneiras diferentes podemos determinar o suplemento d'este \angle : *construindo-o* ou *calculando-o*. A construção do suplemento do \angle AOB depende, porém, do seguinte

TEOREMA. *Quando dois ângulos adjacentes têm seus lados exteriores em linha reta, estes dois ângulos são suplementares.*

H. { As semirretas OA e OC formam uma reta.

T. { $\angle AOB + \angle BOC = 2$ retos.

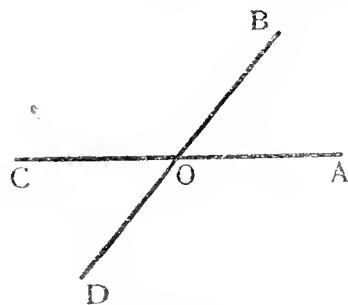


Fig. 17

Com efeito, as semirretas OA e OC estão formando um \angle de meia volta (§ 82); ora, um \angle de meia volta vale dois retos. (§ 83) E, sendo a soma dos \angle AOB e BOC igual ao \angle de meia volta AOC (fig. 17) segue-se que a soma d'estes dois \angle é igual a dois retos.

D'este teorema resulta que, dado um \angle qualquer AOB, para cons-

truir o seu suplemento é bastante prolongar o lado OA, além do vértice do mesmo \angle . O suplemento do \angle AOB será o \angle BOC. Podemos também prolongar o lado OB além do vértice do mesmo \angle ; o \angle AOD será também o suplemento do \angle AOB.

Para calcular o suplemento de um \angle , é bastante subtrair o seu valor numérico, a sua amplitude, de 180 graus ou 200 grados.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIII.

RECÍPROCA. *Se dois ângulos adjacentes são suplementares, seus lados exteriores estão em linha reta.*

H. { $\angle AOC + \angle COB = 2$ retos.

T. { As semirretas OA e OB estão em linha reta.

Tratando-se de uma recíproca, vamos demonstrá-la por absurdo. Para isto é necessário negar a tese. Ora, só há uma maneira de negá-la; é afirmar que as semirretas OA e OB (fig. 18) não estão em linha reta, isto é, afirmar que OA não é o prolongamento de OB. Então prolonguemos OB, e seja OA' este prolongamento. De acôrdo com o teorema direto, o suplemento do \angle COB é o \angle COA'. Mas, por hipótese, o suplemento do \angle COB é o \angle COA.

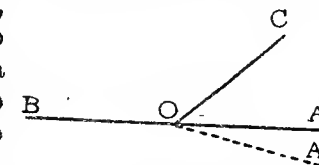


Fig. 18

Entretanto, os \angle COA' e COA não são iguais. (E.M.P.V. § 21) Chegamos assim a um absurdo: um \angle que tem dois suplementos diferentes! Ora, se a negação da tese nos conduziu a um absurdo, e se não há outra maneira de negá-la, forçoso é aceitá-la e admitir que o prolongamento de BO, isto é, OA', se confunde com OA.

PRIMEIRO COROLÁRIO. (*) *A soma de todos os ângulos adjacentes e consecutivos, que se podem formar do mesmo lado de uma reta, e tendo por vértice comum um mesmo ponto desta reta, é igual a dois retos.*

Seja AB a reta dada e O um ponto qualquer desta reta. (fig. 19) Pelo ponto O tracemos as semir-

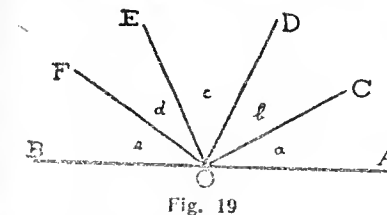


Fig. 19

(*) *Corolário* é um teorema que aparece como consequência imediata de um outro teorema já demonstrado.

retas OC, OD, OE e OF. A soma dos $\angle a, b, c, d, e$, é, com evidência, igual a dois retos.

SEGUNDO COROLÁRIO. *A soma de todos os ângulos adjacentes e consecutivos que se podem formar em redor de um mesmo ponto é igual a quatro retos.*

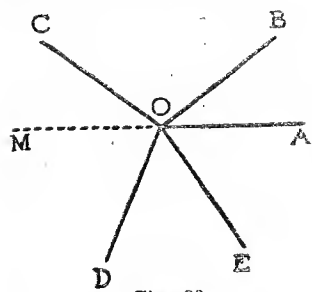


Fig. 20

Sejam AOB, BOC, COD, DOE e EOA os \angle construídos em redor do ponto O. (fig. 20) Prolonguemos uma das semirretas, por exemplo, OA, e seja OM o seu prolongamento. Ora, de acordo com a figura e com o primeiro corolário, teremos:

$$\hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OM = 2 \text{ retos}$$

$$\hat{M}OD + \hat{D}OE + \hat{E}OA = 2 \text{ retos}$$

Somando estas duas igualdades e observando que $\hat{C}OM + \hat{M}OD = \hat{C}OD$, teremos:

$$\hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OD + \hat{D}OE + \hat{E}OA = 4 \text{ retos} \quad \text{C. Q. D.}$$

TERCEIRO COROLÁRIO. *Quando uma reta é perpendicular a uma outra, esta outra é por sua vez perpendicular à primeira.*

$$\text{H. } \{ BC \perp AB$$

$$\text{T. } \{ AB \perp BC$$

Para provar que $AB \perp BC$, temos de provar que AB, ao encontrar BC, forma com BC dois \angle adjacentes iguais. (§83) Entretanto AB, ao encontrar BC, forma apenas um \angle , o $\angle ABC$. Prolonguemos então BC e seja BD este prolongamento. Agora AB, ao encontrar BC ou CD, forma com CD dois \angle adjacentes, os $\angle ABC$ e $\angle ABD$. Se provarmos que estes dois \angle são iguais, teremos provado que $AB \perp BC$. Ora, estes dois \angle são supls. Mas o $\angle ABC$ é reto, porque $BC \perp AB$. Logo, o $\angle ABD$, suplemento do $\angle ABC$, também é reto. Se os dois \angle são retos, são iguais e, nestas condições, a reta AB é, por definição, \perp à reta BC.

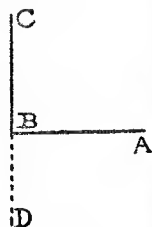


Fig. 21

Dêste corolário resulta que os lados de um ângulo reto são perpendiculares entre si.

37. Bissetriz de um ângulo; \angle o. p. v. Bissetriz de um \angle é a semirreta que, tendo por origem o vértice dêste mesmo \angle , o divide em duas partes iguais. Considerando o $\angle AOD$ (fig. 19), se a semirreta OC dividir este \angle em duas partes iguais, esta semirreta será a bissetriz do $\angle AOD$.

Um \angle qualquer tem evidentemente uma bissetriz e somente uma. Aliás, esta verdade pode ser demonstrada, seguindo marcha idêntica à que seguimos na demonstração do teorema do parágrafo 83.

Observação. Veremos oportunamente (§100) que a bissetriz de um \angle é um lugar geométrico.

Dois \angle opostos pelo vértice são dois \angle tais, que os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro, além do vértice. Dizer, portanto, que os $\angle AOC$ e $\angle BOD$ (fig. 22) são o. p. v., é afirmar implicitamente que AOB e COD são duas retas que se cortam no ponto O. E quando duas retas se cortam (fig. 22) elas formam quatro \angle que são o. p. v., dois a dois.

TEOREMA. *Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.*

$$\text{H. } \{ \begin{array}{l} \text{AOB é uma reta.} \\ \text{COD é uma reta.} \end{array} \quad \text{T. } \{ \hat{A}OC = \hat{B}OD$$

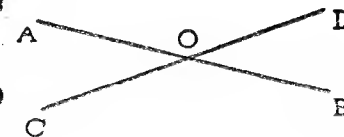


Fig. 22

Sendo AOB uma reta, a semirreta OD forma com ela dois \angle adjacentes supls. Portanto, o $\angle AOD$ é suplemento do $\angle BOD$. Sendo COD uma reta, a semirreta OA forma com ela dois \angle adjacentes supls. Portanto, o $\angle AOD$ é também suplemento do $\angle AOC$. Ora, se os $\angle BOD$ e $\angle AOC$ têm o mesmo suplemento, isto é, o $\angle AOD$, conclue-se que eles são iguais. De um modo análogo provaríamos que os $\angle AOD$ e $\angle BOC$, o. p. v., são também iguais.

A recíproca, isto é, dois \angle iguais são o. p. v., não é, evidentemente, verdadeira.

PRIMEIRO COROLÁRIO. *Se dois ângulos AOC e BOD (fig. 22) na posição de o. p. v. são iguais, assim como os*

ângulos AOD e COB , os pontos A, O, B , estão em linha reta, assim como os pontos C, O, D .

$$H. \begin{cases} \hat{AOC} = \hat{BOD} \\ \hat{AOD} = \hat{BOC} \end{cases} \quad T. \begin{cases} AOB \text{ é uma reta.} \\ COD \text{ é uma reta.} \end{cases}$$

Com efeito,

$$\hat{AOC} + \hat{COB} + \hat{BOD} + \hat{DOA} = 4 \text{ retos} \quad (\S 89, 2.^\circ \text{ corolário})$$

$$\text{Mas,} \quad \hat{AOC} + \hat{BOD} = 2 \times \hat{AOC} \quad (\text{hip.})$$

$$\hat{COB} + \hat{DOA} = 2 \times \hat{COB} \quad (\text{hip.})$$

$$\text{Logo,} \quad 2 \times \hat{AOC} + 2 \times \hat{COB} = 4 \text{ retos} \quad \therefore \\ \hat{AOC} + \hat{COB} = 2 \text{ retos}$$

Ora, se os \angle adjacentes AOC e COB são supls., seus lados exteriores, isto é, AO e OB estão em linha reta. (§86, recíproca) Portanto, AOB é uma reta. De modo análogo se provará que COD é também uma reta.

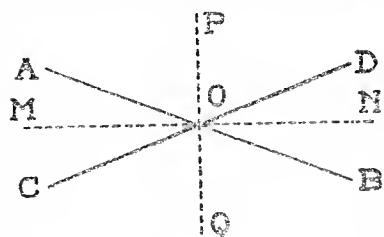


Fig. 23

SEGUNDO COROLÁRIO. Se dois ângulos, na posição de o. p. v. são iguais, e dois lados estão em linha reta, os outros dois também estão em linha reta. (fig. 23)

$$H. \begin{cases} \hat{AOC} = \hat{BOD} \\ AOB \text{ é uma reta.} \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} COD \text{ é uma reta.} \end{cases}$$

Sendo AOB uma reta (hip.) os \angle adjacentes AOD e BOD são supls.; logo,

$$\hat{AOD} + \hat{BOD} = 2 \text{ retos} \quad (1)$$

Mas, $\hat{AOC} = \hat{BOD}$ (hip.). Substituindo em (1)...

$$\hat{AOD} + \hat{AOC} = 2 \text{ retos}$$

Mas, estes dois \angle , além do serem supls. são adjacentes; logo, seus lados exteriores, OC e OD estão em linha reta. (§86, recíproca)

TERCEIRO COROLÁRIO. As bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice estão em linha reta. (fig. 23)

$$H. \begin{cases} AOB \text{ é uma reta.} \\ COD \text{ é uma reta.} \\ OM \text{ é bissetriz de } \hat{AOC}. \\ ON \text{ é bissetriz de } \hat{BOD}. \end{cases} \quad T. \begin{cases} MON \text{ é uma reta.} \end{cases}$$

Sendo AOB e COD duas retas que se cortam no ponto O , os \angle AOC e BOD , o. p. v., são iguais. Portanto,

$$\hat{AOC} = \hat{BOD} \quad \therefore \quad \frac{\hat{AOC}}{2} = \frac{\hat{BOD}}{2}$$

Mas, a metade do $\angle AOC$ é o $\angle AOM$, e a metade do $\angle BOD$ é o $\angle BON$. (hip.)
Logo: $\hat{AOM} = \hat{BON}$

Ora, estes dois \angle estão na posição de o. p. v.; são iguais, e dois de seus lados, OA e OB , estão em linha reta. Portanto, de acordo com o segundo corolário, os outros dois lados, OM e ON , também estão em linha reta, isto é, MON é uma reta, como queríamos demonstrar.

QUARTO COROLÁRIO. Se duas retas AB e CD (fig. 23) se cortam formando assim quatro ângulos o. p. v. dois a dois, as quatro bissetrizes formam duas retas perpendiculares entre si.

Sejam OP e OQ as bissetrizes dos \angle AOD e BOC . Já demonstramos que as bissetrizes OM e ON formam uma única reta MON . De modo análogo demonstraremos que as bissetrizes OP e OQ formam também uma única reta POQ . Queremos agora demonstrar que $PQ \perp MN$. É bastante demonstrar que o $\angle MOP$ é reto. Ora, a semirreta OA forma com a reta CD dois \angle adjacentes supls.; portanto,

$$\hat{AOC} + \hat{AOD} = 2 \text{ retos} \quad \therefore \\ \frac{\hat{AOC}}{2} + \frac{\hat{AOD}}{2} = 1 \text{ reto}$$

Mas a metade do $\angle AOC$ é o $\angle MOA$, e a metade do $\angle AOD$ é o $\angle AOP$. Logo,

$$\hat{M}OA + \hat{A}OP = 1 \text{ reto} \quad \therefore \quad \hat{M}OP = 1 \text{ reto}$$

Se o $\angle MOP$ é reto, $OP \perp MO$ ou $PQ \perp MN$, como queríamos demonstrar.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIII.

88. Rotações de semiplanos. A figura PQRS (fig. 24) representa um plano. A reta MN, traçada neste plano, divide-o em duas porções distintas, em dois *semiplanos*, aos quais podemos chamar de *semiplano direito* e *semiplano esquerdo*.

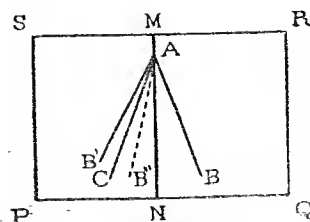


Fig. 24

Consideremos duas semirretas quaisquer AB e AC, traçadas no plano PQRS, a primeira situada no semiplano direito, e a segunda no esquerdo. Façamos o semiplano direito girar em torno de MN (que fica imóvel, como um eixo fixo de rotação), até coincidir com o semiplano esquerdo. E agora pergunta-se: A semirreta AB coincidirá, em direção, com a semirreta AC?

As semirretas AB e AC formam com a semirreta AN, os dois \angle adjacentes BAN e CAN. Durante o movimento de rotação do semiplano direito, em torno de MN, o lado AN, comum aos dois \angle adjacentes CAN e BAN, não muda de posição, porque está situado no eixo de rotação MN. Isto pôsto, vamos responder à pergunta acima formulada.

Se o $\angle BAN$ for igual ao $\angle CAN$, quando o semiplano direito coincidir com o esquerdo, a semirreta AB coincidirá, em direção, com a semirreta AC.

Se o $\angle BAN$ for maior ou menor que o $\angle CAN$, quando o semiplano direito coincidir com o esquerdo, a semirreta AB não coincidirá, em direção, com a semirreta AC e tomará a posição AB' ou AB''.

Portanto, para que AB coincida com AC, é necessário que os \angle formados com o eixo de rotação, sejam iguais.

(*) Seria conveniente que estas explicações fossem dadas de um modo concreto, com uma folha de papel mais ou menos transparente.

Suponhamos agora que AB e AC são dois segmentos iguais, e façamos o semiplano direito girar em torno de MN, até coincidir com o esquerdo. O segmento AB coincidirá, em direção, com o segmento AC? *Sim*, responderá um aluno distraído, porque os dois segmentos são iguais, por hipótese. *Nem sempre*, responderá um aluno atento; desta vez a igualdade dos dois segmentos AB e AC não é condição suficiente para que eles coincidam; a primeira condição para que se verifique a coincidência dos dois segmentos, é que eles formem \angle iguais com o eixo MN. Uma vez preenchida esta condição, então, se os dois segmentos forem iguais, o ponto B coincidirá com o ponto C, e os dois segmentos coincidirão.

Portanto, para que os dois segmentos iguais AB e AC coincidam, é necessário, em primeiro lugar, que eles formem \angle iguais com o eixo de rotação.

No plano PQRS (fig. 25) tracemos uma reta qualquer MN, e uma reta $AB \perp MN$ no ponto O. A reta MN divide o plano PQRS em dois semiplanos. Sejam C e D dois pontos quaisquer situados na $\perp AB$. Vejamos quais as condições necessárias para que, fazendo girar o semiplano direito em torno de MN, até coincidir com o esquerdo, o ponto C coincida com o ponto D. A primeira condição é que os \angle MOB e MOA sejam iguais. Ora, esta condição está preenchida, porque, sendo $MO \perp AB$, os dois \angle são iguais. A segunda condição é que o segmento OC seja igual ao segmento OD. Se tivermos $OC < OD$, o ponto C tomará a posição D'; se tivermos $OC > OD$, o ponto C tomará a posição D''.

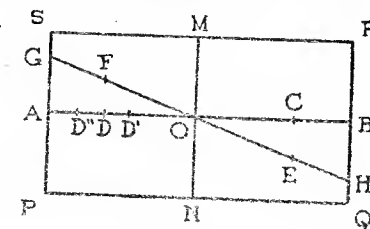


Fig. 25

39. Perpendiculares e oblíquas. TEOREMA FUNDAMENTAL. Por um ponto tomado fora de uma reta, podemos traçar sempre uma perpendicular a esta reta, e somente uma.

Seja AB a reta dada e C o ponto dado. (fig. 26) A reta AB, suposta horizontal, divide o plano em que ela se acha, em dois

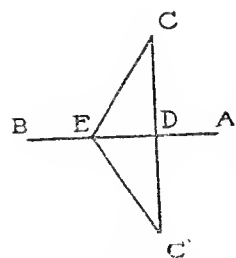


Fig. 26

semiplanos: o superior e o inferior. Façamos o semiplano superior girar em torno de AB, até coincidir com o semiplano inferior. Então, o ponto C tomará a posição C'. Em seguida, façamos o semiplano superior voltar à sua posição primitiva, e tracemos o segmento CC'. Formaremos assim os dois \angle adjacentes ADC e ADC'. Vamos demonstrar que estes dois \angle são iguais.

Façamos o semiplano superior girar novamente em torno de AB, até coincidir com o inferior. O lado AD, comum aos dois \angle adjacentes ADC e ADC', não muda de posição; o ponto C coincide com o ponto C'; então o lado DC do \angle ADC coincide com o lado DC' do \angle ADC'. Logo, o \angle ADC coincide com o \angle ADC' e estes dois \angle são, por consequência, iguais.

Ora, se a reta AB forma com a reta CC' dois \angle adjacentes iguais, $AB \perp CC'$ (§83), ou $CC' \perp AB$. Está, portanto, demonstrada a primeira parte de nossa tese. Passemos à segunda parte, que vamos demonstrar pela redução ao absurdo. Suponhamos que seja possível traçar, pelo ponto C, uma segunda reta CE também \perp AB. Então o \angle AEC será reto. Ligando o ponto E ao ponto C' formaremos um segundo \angle AEC', igual ao \angle AEC, como é fácil de provar, fazendo o semiplano superior girar em torno de AB, etc.. Ora, se o \angle AEC é reto, o \angle AEC' é também um \angle reto. Logo, estes dois \angle são *supls*. Mas, estes dois \angle são adjacentes; neste caso, seus lados exteriores estão em linha reta (§86, recíproca); CEC' é uma reta. E teremos assim duas retas distintas, CDC' e CEC', passando por dois pontos dados, C e C', o que é impossível, é absurdo. Nestas condições, CE não pode ser \perp à AB.

PRIMEIRO TEOREMA. *Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular e uma oblíqua a esta mesma reta, a perpendicular será menor do que a oblíqua.* (fig. 26)

$$H. \begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} CD < CE \end{cases}$$

Prolonga-se o segmento CD até que o prolongamento DC' seja igual a CD. Liga-se o ponto E ao ponto C'. Em seguida, faz-se o semiplano superior girar em torno de AB até coincidir com o inferior. O \angle ADC sendo reto, por hipótese, seu suplemento, o \angle ADC' também é reto. Logo, os \angle ADC e ADC' são iguais. Nestas condições, o segmento DC coincide, em direção, com o segmento DC'. (§88) E sendo $DC = DC'$ por construção, o ponto C coincide com o ponto C'. Se o ponto E permanece imóvel, no eixo de rotação, e se o ponto C coincide com o ponto C', conclui-se que o segmento EC é também igual ao segmento EC'.

Ora, o caminho mais curto entre dois pontos, é o segmento retilíneo que os une; portanto,

$$CD + DC' < CE + EC'$$

$$\text{Mas, } CD = DC' \text{ e } CE = EC' \quad \dots$$

$$2CD < 2CE \quad \dots \quad CD < CE$$

Observação. Podemos traçar uma infinidade de segmentos, ligando o ponto C a qualquer ponto da reta AB. Desta infinidade de segmentos, o mais curto, o menor, é o segmento \perp à reta AB. A este segmento dá-se o nome de *menor distância do ponto C à reta AB*, ou simplesmente *distância do ponto C à reta AB*. Desde que, por um ponto, tomado fora de uma reta, só é possível traçar um segmento \perp a esta reta, e sendo este segmento menor do que qualquer outro segmento que ligue o mesmo ponto à mesma reta, segue-se que a distância de um ponto a uma reta é uma grandeza perfeitamente determinada. *Entre um ponto e uma reta não há duas distâncias diferentes.*

SEGUNDO TEOREMA. *Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular e duas oblíquas, cujos pés se afastam igualmente do pé da perpendicular, as duas oblíquas serão iguais.* (fig. 27)

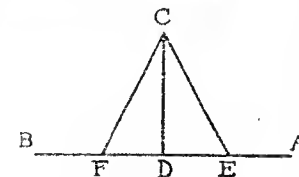


Fig. 27

Sendo $CD \perp AB$, os \angle CDA e CDB são iguais. A reta CD divide o plano onde está a figura, em dois semiplanos. Façamos o semiplano direito girar em torno de CD, até coincidir com o semiplano esquerdo. Sendo $\hat{CDA} = \hat{CDB}$ (hip.), a semirreta DA

$$H. \begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \\ CF \text{ oblíqua } AB \\ DE = DF \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} CE = CF \end{cases}$$

coincide, em direção, com a semirreta DB, e sendo $DE = DF$ (hip.), o ponto E coincide com o ponto F. Se o ponto C não muda de posição, e se o ponto E coincide com o ponto F, o segmento CE coincide com o segmento CF. Logo, $CE = CF$.

TERCEIRO TEOREMA. *Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular e duas oblíquas, cujos pés se afastem desigualmente do pé da perpendicular, as duas oblíquas serão desiguais, e a oblíqua maior será aquela cujo pé se afastar mais do pé da perpendicular.* (fig. 28)

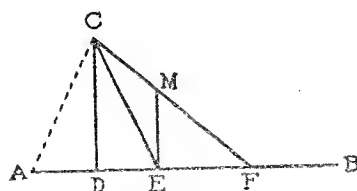


Fig. 28

Pelo ponto E traçamos o segmento $ME \perp AB$. Estando o ponto E situado entre os pontos D e F, devido à hipótese ($DF > DE$), a $\perp ME$ encontra necessariamente a oblíqua CF no ponto M. Ora, o caminho mais curto entre dois pontos, é o segmento retilíneo que os une; portanto,

$$CE < CM + ME.$$

Sendo $ME < MF$, (primeiro teorema), com mais razão

$$CE < CM + MF$$

Porém, $CM + MF = CF$ (figura).

Logo, $CE < CF \therefore CF > CE$

Observação. Se, em lugar da oblíqua CE, fosse dada a oblíqua CA, seria necessário, antes de iniciar esta demonstração, substituir a oblíqua CA pela oblíqua igual CE.

Observação. Podemos traçar uma infinidade de segmentos, ligando o ponto C à reta AB. (figs. 26, 27 e 28) O menor é o segmento \perp à AB, isto é, CD, e este segmento não tem igual. Os segmentos oblíquos serão sempre maiores do que o segmento \perp , e serão iguais dois a dois. Em uma reta dada AB existem sempre dois pontos equidistantes de um ponto C situado fora da reta, e somente dois. Por exemplo, os segmentos CA e CE (fig. 28) podem ser iguais, mas os segmentos CA, CE e CF nunca podem ser iguais.

$$H. \begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \\ CF \text{ oblíqua } AB \\ DF > DE \end{cases}$$

$$T. \{ CF > CE$$

Exercício. Traçar uma reta AB e determinar um ponto C situado a 5cm de AB; determinar, em AB, dois pontos situados a 7cm do ponto C; três pontos situados a 10cm do ponto C; dois pontos situados a 4cm do ponto C.

RECÍPROCA DO PRIMEIRO TEOREMA. *Se o segmento CD representa a distância do ponto C à reta AB, CD é perpendicular à AB.* (fig. 26)

$$H. \begin{cases} CD \text{ é a distância do ponto} \\ C \text{ à reta } AB. \end{cases}$$

$$T. \{ CD \perp AB$$

Neguemos a tese, suponhamos que CD não é $\perp AB$, e que $CE \perp AB$. Neste caso, teremos $CE < CD$, e CE será a distância do ponto C à reta AB (teorema direto). Mas, CD é também a distância do ponto C à reta AB (hip.). Entretanto, $CE < CD$. Chegamos assim a um absurdo: entre o ponto C e a reta AB há duas distâncias diferentes! Logo, desde que CD não pode ser oblíqua à AB, tem de ser \perp .

RECÍPROCA DO SEGUNDO TEOREMA. *Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular CD e duas oblíquas iguais CE e CF, os pés destas oblíquas distarão igualmente do pé da perpendicular.* (fig. 27)

$$H. \begin{cases} CD \perp AB \\ CE \text{ oblíqua } AB \\ CF \text{ oblíqua } AB \\ CE = CF \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Suponhamos } DE > DF. \text{ Resulta} \\ CE > CF \text{ (terceiro teorema), conclu-} \\ \text{são absurda, porque é contrária à hi-} \\ \text{pótese.} \end{array}$$

$$T. \{ DE = DF \quad \begin{array}{l} \text{Suponhamos } DE < DF. \text{ Então,} \\ CE < CF \text{ (terceiro teorema), o que é} \end{array}$$

absurdo, por ser uma conclusão contrária à hipótese.

Não sendo possível $DE > DF$ ou $DE < DF$, é necessário aceitar a tese, isto é, $DE = DF$.

Em particular, CE e CF, estando situadas do mesmo lado da $\perp CD$, e sendo iguais, seus pés, isto é, os pontos E e F, coincidem. (fig. 27)

RECÍPROCA DO TERCEIRO TEOREMA. *Se, por um ponto tomado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular CD e duas oblíquas desiguais CE e CF, seus pés distarão desigualmente do pé da perpendicular, e a distância maior corresponderá à oblíqua maior.* (fig. 28)

H. $\left\{ \begin{array}{l} CD \perp AB \\ CE \text{ obl}iqua \text{ } AB \\ CF \text{ obl}iqua \text{ } AB \\ CF > CE \end{array} \right.$ Suponhamos $DF = DE$. Resulta $CF = CE$ (segundo teorema) conclusão absurda, porque é contrária à hipótese.

T. $\left\{ \begin{array}{l} DF > DE \end{array} \right.$ Suponhamos $DF < DE$. Então, $CF < CE$ (terceiro teorema), o que é absurdo, por ser uma conclusão contrária à hipótese.

Não sendo possível $DF = DE$ ou $DF < DE$, é necessário aceitar a tese, isto é, $DF > DE$.

90. A mediatriz. Mediatriz de um segmento retilíneo dado AB é a perpendicular ao segmento dado, e que divide este mesmo segmento em duas partes iguais.

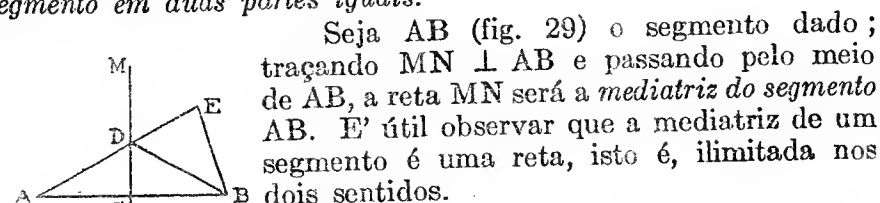


Fig 29

TEOREMA. Qualquer ponto da mediatriz de um segmento dado AB dista igualmente dos pontos A e B .

Traça-se a mediatriz MN do segmento AB e toma-se um ponto qualquer D da mediatriz. Em seguida, traçam-se os segmentos DA e DB .

H. $\left\{ \begin{array}{l} MN \perp AB \\ CA = CB \end{array} \right.$ T. $\left\{ \begin{array}{l} DA = DB \end{array} \right.$

Com efeito, DA e DB são iguais porque são duas oblíquas em relação à reta AB , cujos pés, A e B , distam igualmente do pé da \perp AC . (§89, segundo teorema)

TEOREMA RECÍPROCO. Se um ponto D dista igualmente de dois pontos A e B , ele está situado na mediatriz do segmento AB . (fig. 29)

Liga-se o ponto A ao ponto B , liga-se o ponto D aos pontos A e B , pelo ponto D , traça-se $DC \perp AB$.

H. $\left\{ \begin{array}{l} DA = DB \\ DC \perp AB \end{array} \right.$ T. $\left\{ \begin{array}{l} \text{O ponto } D \text{ está na mediatriz do segmento } AB. \end{array} \right.$

Sendo $DC \perp AB$, os segmentos DA e DB são oblíquos. Mas estas oblíquas são iguais, por hipótese. Logo, seus pés distam igualmente do pé da \perp DC (§89, recíproca do segundo teorema), donde $CA = CB$. Ora, sendo DC ou $MN \perp AB$ no ponto C , e sendo $CA = CB$, conclui-se que MN é a mediatriz do segmento AB e que o ponto D está situado nesta mediatriz.

TEOREMA CONTRÁRIO. Um ponto situado fora da mediatriz de um segmento AB , não dista igualmente dos pontos A e B . (fig. 29)

Traça-se o segmento AB e a mediatriz MN . Toma-se um ponto qualquer E fora da mediatriz, e liga-se o mesmo aos pontos A e B .

H. $\left\{ \begin{array}{l} MN \text{ é a mediatriz do segmento } AB; \\ \text{o ponto } E \text{ não está na mediatriz.} \end{array} \right.$ T. $\left\{ \begin{array}{l} EA > EB \end{array} \right.$

Se o ponto E não está na mediatriz, um dos segmentos EA ou EB corta a mediatriz. Seja EA o segmento que corta a mediatriz no ponto D , e tracemos o segmento DB .

Ora, $EB < ED + DB$ (por que?)

Mas, estando D na mediatriz de AB , $DB = DA$. Logo,

$$EB < ED + DA$$

Porém, $ED + DA = EA$ (figura). Portanto,

$$EB < EA \therefore EA > EB$$

91. A mediatriz é um lugar geométrico. Seja MN a mediatriz de um segmento dado, AB . (fig. 29) Ficou provado que um ponto qualquer da reta MN dista igualmente dos pontos A e B , ao passo que um ponto qualquer situado fora da reta MN não dista igualmente dos pontos A e B . Todos os pontos da reta MN gozam, portanto, de uma determinada propriedade, propriedade esta que não pertence, absolutamente, aos pontos situados fora da reta MN . Logo, a reta $MN \perp AB$, e passando pelo meio de AB , é um lugar geométrico.

Lugar geométrico é um conjunto de pontos que gozam todos de uma determinada propriedade, propriedade esta que não pertence aos pontos situados fora deste mesmo conjunto.

Existem numerosos lugares geométricos, cujo conhecimento facilita sobremaneira a resolução dos problemas. Por enquanto conhecemos apenas um: a mediatriz de um segmento retilíneo.

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos dados A e B, é a mediatriz do segmento retilíneo AB.

Quando, na resolução de um problema qualquer de Geometria, necessitarmos de um ponto igualmente distante de dois pontos dados A e B, não devemos hesitar; tracemos imediatamente a mediatriz do segmento AB; é nela, e somente nela, que existem pontos igualmente distantes dos pontos A e B.

Exercícios em classe

Observação. Nestes exercícios não é permitido o uso do esquadro.

I. Construir a mediatriz de um segmento dado.

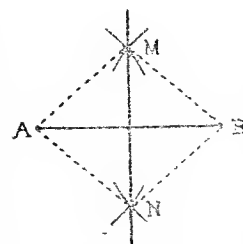


Fig. 30

Seja AB o segmento dado. Fazendo centro nos pontos A e B, traçam-se dois arcos que se cortem, determinando assim o ponto M. O raio destes arcos pode ser qualquer, porém deve ser o mesmo para os dois arcos. Sendo o raio AM igual ao raio BM, o ponto M é equidistante dos pontos A e B e, por consequência, está na mediatriz pedida. De um modo análogo, determina-se um segundo ponto da mediatriz, o ponto N. Em seguida, traça-se a reta MN. Esta reta contém os pontos M e N, situados na mediatriz do segmento AB. Ora, por dois pontos dados, M e N, só é possível traçar uma reta. Logo a reta MN é a mediatriz do segmento dado.

II. Traçar uma \perp a um segmento dado, e que passe pelo centro do mesmo segmento.

III. Dividir um segmento dado em duas partes iguais.

IV. Dividir um segmento AB em 4, 8, 16, ..., etc., partes iguais, enfim, em um número de partes iguais dado pela expressão 2^n .

V. Traçar uma \perp a uma reta dada, por um ponto dado nesta reta.

Seja AB a reta dada (fig. 27) e D o ponto dado. Tomam-se na reta AB, à direita e à esquerda do ponto D, dois segmentos iguais, DE e DF. O ponto D será o meio do segmento EF. Em seguida traça-se a mediatriz do segmento EF.

VI. Traçar uma \perp ao segmento AB, pelo ponto B.

VII. Traçar uma \perp a uma reta dada por um ponto dado fora da reta.

Seja AB a reta dada (fig. 31) e C o ponto dado. Fazendo centro em C e com um raio qualquer, traça-se um arco que corte a reta AB em dois pontos M e N; o ponto C, sendo equidistante dos pontos M e N, está na mediatriz do segmento MN. Em seguida determina-

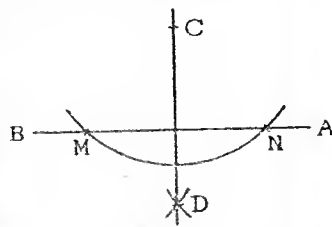


Fig. 31

se um outro ponto D, também equidistante dos pontos M e N. (problema I) Unindo o ponto C ao ponto D, a reta CD será a mediatriz do segmento MN e, por consequência, será \perp à reta AB.

VIII. Determinar na reta AB (fig. 32) um ponto equidistante dos pontos M e N.

O lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos M e N é a mediatriz do segmento MN. Portanto, se o ponto pedido existe, ele está nesta mediatriz. Liga-se então o ponto M ao ponto N e traça-se a mediatriz do segmento MN. Esta mediatriz, CD, encontra a reta AB no ponto E, que é o ponto pedido.

IX. Em uma \circ dada, determinar um ponto equidistante de dois pontos dados e situados fora da \circ .

X. Determinar um ponto equidistante de três pontos dados A, B e C, não situados em linha reta.

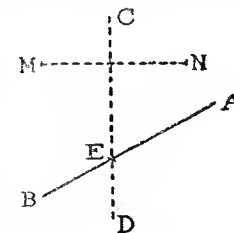


Fig. 32

92. Polígonos. Consideremos três ou mais pontos A, B, C, D, E, situados em um mesmo plano, e de modo que, na ordem em que estão sendo considerados, três pontos consecutivos quaisquer não estejam em linha reta. (fig. 33)

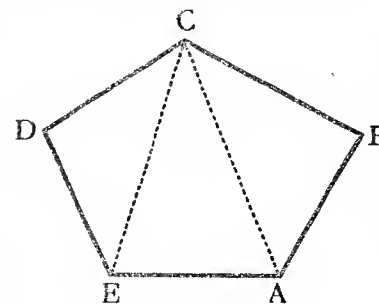


Fig. 33

Tracemos os segmentos retilíneos que unem o ponto A ao ponto B, o ponto B ao ponto C, o ponto C ao ponto D, o ponto D ao ponto E e, finalmente, o último ponto, E, ao primeiro, A. A figura assim constituída é chamada **polígono**.

Os pontos A, B, C, D e E são os **vértices do polígono**; os segmentos AB, BC, CD, etc., são os **lados**; os ângulos formados por

dois lados consecutivos são os **ângulos do polígono**.

Um polígono tem tantos vértices e tantos \angle quantos são os seus lados.

Diagonal de um polígono é o segmento retilíneo que une dois vértices não consecutivos do mesmo polígono. Os segmentos AC e EC (fig. 33) são diagonais.

Ângulo interno de um polígono ou simplesmente **ângulo de um polígono**, é o ângulo formado por dois lados consecutivos do

mesmo polígono e cuja abertura fica voltada para o interior do polígono. Os \angle ABC, CBD, etc., (fig. 33) são \angle do polígono.

Ângulo externo de um polígono é o ângulo formado por um de seus lados e pelo prolongamento do lado consecutivo.

Contorno de um polígono é o conjunto de seus lados.

Perímetro de um polígono é a soma dos comprimentos de seus lados.

As palavras *polígono* e *perímetro*, de origem grega, significam respectivamente *numerosos ângulos* e *medida em torno*.

A superfície de um polígono é a porção de superfície plana limitada pelo contorno do polígono.

Com a palavra *polígono* tanto podemos designar o seu contorno, como a porção de superfície plana, limitada por este mesmo contorno. E diremos de um modo bastante simples que:

Polígono é uma porção de superfície plana limitada por três ou mais segmentos retilíneos e consecutivos. (*)

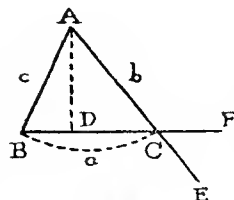


Fig. 34

93. Triângulos. Triângulo é o polígono de três lados. (fig. 34)

O lado BC não é lado do \angle A; diremos então que é *oposto* ao \angle A, ou que o \angle A é *oposto* ao lado BC. Em lugar de designar os lados do \triangle ABC com duas maiúsculas, e dizer, por exemplo, *lado BC*, será necessário, às vezes, designá-lo por uma minúscula.

Mas, esta minúscula não será qualquer;

será sempre a minúscula correspondente à letra que está designando o vértice do \angle oposto. E diremos então *lado BC* ou *lado a*, *lado AC* ou *lado b*, *lado AB* ou *lado c*.

Em um \triangle qualquer ABC, um lado e um \angle se dizem *adjacentes*, quando o lado do \triangle é também lado do \angle . O \angle B é adja-

(*) O polígono que acabamos de definir é o polígono plano e convexo. Veremos oportunamente a diferença entre polígonos convexos e côncavos, planos e reversos. Salvo aviso em contrário, com a palavra *polígono* designaremos sempre o polígono plano e convexo.

cente ao lado BC; o lado AB é adjacente ao \angle B; os \angle B e C são adjacentes ao lado BC.

Base de um \triangle é qualquer um de seus lados. **Altura** de um \triangle é o segmento \perp à base, traçado pelo vértice oposto à mesma base. Assim, tomando como base do \triangle ABC o lado BC, a altura será o segmento AD, \perp à base BC, e traçado pelo ponto A.

Um \triangle tendo três lados, tem três bases e três alturas.

Mediana de um \triangle é o segmento retilíneo que liga um vértice qualquer do \triangle ao meio do lado oposto. Portanto, um \triangle tem três medianas.

Ceviana de um \triangle é o segmento retilíneo que liga um vértice qualquer do \triangle a um ponto qualquer interno do lado oposto. As alturas, as bissetrizes internas e as medianas de um \triangle são cevianas particulares.

Ângulo externo de um \triangle é o \angle formado por um de seus lados com o prolongamento do lado contíguo. O \angle externo do \triangle ABC. O \angle ACF (fig. 34), é um \angle externo do \triangle ABC. O \angle ACF e o \angle interno adjacente ACB são supls. (§86) Com o mesmo vértice C há dois \angle externos ao \triangle ABC: os \angle ACF e BCE. Estes dois \angle são iguais por serem o. p. v. (§87); cada um deles tem a sua bissetriz, mas estas bissetrizes formam uma mesma reta (§87)

Bissetriz de um \triangle é o segmento da bissetriz de qualquer um de seus ângulos, segmento este que tem por origem o vértice do \angle e, por extremidade, o ponto em que a bissetriz encontra o lado oposto ao mesmo \angle .

No \triangle ABC (fig. 35) a bissetriz do \angle ACB é a semirreta CMX; mas a bissetriz do \triangle ABC é o segmento CM. Oportunamente trataremos das bissetrizes dos \angle externos de um \triangle . Um \triangle tem três bissetrizes internas e três externas.

De tudo o que dissemos resulta que um \triangle contém numerosos elementos. Para maior clareza vamos dividir estes elementos em dois grupos: *elementos principais* e *elementos secundários*. Os elementos principais são os três lados e os três \angle . Os elementos secundários são as alturas, as medianas, as bissetrizes internas e externas, as mediatrizes de seus lados, as cevianas, etc..

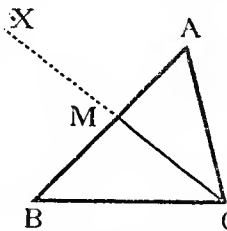


Fig. 35

94. O triângulo isósceles. O triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais. (E.M.P.V. §31) No Δ isósceles é habitual tomar como base o lado que não tem igual, isto é, o lado BC. (fig. 36) Então a altura será o segmento AM, \perp à base, e tendo por extremidades o vértice A, oposto à base BC, e um ponto M desta mesma base.

TEOREMA. Em um triângulo isósceles, aos lados iguais se opõem ângulos iguais.

Isto quer dizer que, quando dois lados de um Δ são iguais, os \angle opostos a estes dois lados são também iguais.

$$H. \{ AB = AC \quad T. \{ \hat{C} = \hat{B}$$



Fig. 36

Façamos o Δ ABC girar sobre si mesmo, de modo que o \angle A volte a ocupar a sua posição primitiva. O lado AC coincidirá exatamente em direção e grandeza com seu igual AB e este, por sua vez, coincidirá exatamente, também em direção e grandeza, com seu igual AC. Então o lado CB ficará invertido, coincidindo com a sua posição primitiva BC. Donde resulta que o \angle C coincidirá com o \angle B.

$$\text{Logo, } \hat{C} = \hat{B}$$

RECÍPROCA. Se dois ângulos de um triângulo são iguais, os lados opostos a estes ângulos são também iguais, e o triângulo é isósceles.

$$H. \{ \hat{B} = \hat{C} \quad T. \{ AB = AC$$

Façamos o Δ ABC girar sobre si mesmo, de modo que o lado invertido CB coincida com a sua posição primitiva BC. Sendo $\hat{B} = \hat{C}$ (hip.) o lado CA coincidirá em direção com o lado BA, e o lado BA coincidirá também em direção com o lado CA. O ponto A, devendo coincidir com um ponto situado em BA e um ponto situado em CA, coincidirá necessariamente com o ponto A. Donde resulta que CA coincide também em grandeza com BA, e BA com CA. Logo, $AB = AC$

COROLÁRIO. O triângulo equilátero é equiângulo, e reciprocamente.

Sejam A, B e C os três ângulos do triângulo; os lados respectivamente opostos serão a, b, e c. (§93)

$$H. \{ a = b = c \quad T. \{ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

Sendo $a = b$, teremos $\hat{A} = \hat{B}$ (teorema direto) (1)

Sendo $a = c$, teremos $\hat{A} = \hat{C}$ (teorema direto) (2)

Combinando (1) e (2) resulta:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

$$H. \{ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} \quad T. \{ a = b = c$$

Sendo $\hat{A} = \hat{B}$, teremos $a = b$ (teorema recíproco) (1)

Sendo $\hat{A} = \hat{C}$, teremos $a = c$ (teorema recíproco) (2)

Combinando (1) e (2) resulta:

$$a = b = c$$

TEOREMA. Em um triângulo qualquer, ao maior ângulo se opõe o maior lado.

$$H. \{ \hat{B} > \hat{A} \quad T. \{ AC > BC$$

Consideremos o Δ ABC (fig. 37). Sendo

$\hat{B} > \hat{A}$, vamos traçar no interior do \angle B um segmento BD que forme com BA um \angle ABD igual ao \angle A. Então o Δ ABD será isósceles $\therefore AD = BD$.

O segmento BC é a menor distância entre os pontos B e C. Logo $BC < CD + BD$. Mas $BD = AD \therefore BC < CD + AD \therefore BC < AC \therefore AC > BC$.

RECÍPROCA. Em um triângulo qualquer, ao maior lado se opõe o maior ângulo.

Vamos demonstrar esta recíproca pela redução ao absurdo. A figura é inútil, porque já sabemos designar convenientemente os lados e os \angle de um Δ .

H. $\{ a > b \}$ Suponhamos $\hat{A} < \hat{B}$; resulta $a < b$, de acordo com o teorema direto, o que é absurdo,
T. $\{ \hat{A} > \hat{B} \}$ porque é contrário à hipótese.

Suponhamos $\hat{A} = \hat{B}$; neste caso o Δ será isósceles e teremos $a = b$, o que é absurdo, porque é contrário à hipótese.

Ora, se não é possível $\hat{A} < \hat{B}$ ou $\hat{A} = \hat{B}$, resulta $\hat{A} > \hat{B}$.

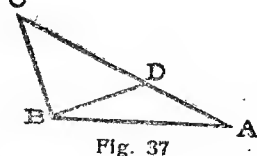


Fig. 37

Em resumo:

I. Se os três lados de um \triangle são iguais, os três \angle são também iguais, e reciprocamente.

II. Se dois lados de um \triangle são iguais, os \angle opostos a estes dois lados são também iguais, e reciprocamente.

III. Se os três lados de um \triangle são diferentes, os três \angle são também diferentes, e reciprocamente; ao maior lado se opõe o maior \angle e reciprocamente.

95. Grandeza relativa dos lados de um triângulo. Os três lados que constituem um \triangle não podem ser quaisquer; não podem ser três segmentos com comprimentos arbitrários; devem satisfazer às duas condições que constituem o seguinte:

TEOREMA. Qualquer lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois, porém maior do que a diferença. (fig. 37)

$$H. \{ \begin{array}{l} ABC \text{ é um } \triangle. \end{array} \quad T. \{ \begin{array}{l} AB < AC + BC \\ AB > AC - BC \end{array}$$

Em relação à primeira parte da tese não há nada a demonstrar porque, entre os pontos A e B, o caminho mais curto é o segmento retilíneo AB.

Para demonstrar a segunda parte da tese, tomemos o lado AC (ou BC) e apliquemos a este lado a primeira propriedade. Teremos $AC < AB + BC \dots AC - BC < AB \dots$

$$AB > AC - BC.$$

Portanto, um \triangle no qual $a=15m$, $b=8m$ e $c=5m$, não existe porque a não é menor do que $b+c$ ou porque c não é maior que $a-b$.

96. Linhas envoltentes e envolvidas. Uma linha quebrada ou poligonal é convexa quando, prolongando-se qualquer um de seus elementos, toda ela fica situada do mesmo lado deste elemento prolongado. A linha poligonal ABCD (fig. 38)

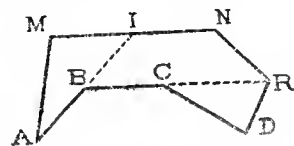


Fig. 38.

é convexa porque, prolongando-se o elemento BC ou qualquer outro, toda ela fica situada do mesmo lado deste elemento prolongado.

Quando duas linhas poligonais ABCD e AMNRD têm extremidades comuns,

os pontos A e D, e estão situadas do mesmo lado do segmento retilíneo AD, a linha interior ABCD é chamada *envolvida* e a exterior AMNRD é chamada *envolvente*.

TEOREMA. Uma linha poligonal convexa é menor que uma linha poligonal envolvente, convexa ou não, e terminada nas mesmas extremidades. (fig. 38)

Com efeito, prolongando os elementos AB e BC, até encontrarem a envolvente nos pontos I e R, teremos:

$$\begin{aligned} AB + BI &< AM + MI \\ BC + CR &< BI + IN + NR \\ CD &< CR + RD \end{aligned}$$

Somando e reduzindo:

$$\begin{aligned} AB + BC + CD &< AM + MI + IN + NR + RD \dots \\ AB + BC + CD &< AM + MN + NR + RD \end{aligned}$$

97. Igualdade de triângulos quaisquer. Os elementos principais de um \triangle são seis: os três lados e os três \angle . Para que dois \triangle sejam iguais, é necessário que possam coincidir, isto é, os três lados de um devem coincidir com os três lados do outro, e os três \angle do primeiro devem coincidir com os três \angle do segundo. Vamos agora estudar três teoremas, chamados geralmente **casos de igualdade de \triangle quaisquer**, pelos quais verificaremos que dois \triangle são iguais quando três elementos do primeiro, convenientemente escolhidos, são iguais aos três elementos correspondentes do segundo. (§ 163)

PRIMEIRO CASO. Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual adjacente a dois ângulos iguais, cada um a cada um.

$$\begin{array}{l} H. \left\{ \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right. \\ T. \left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC = \triangle A'B'C' \end{array} \right. \end{array}$$

Façamos o $\triangle A'B'C'$ (fig. 39) deslizar no plano em que está situado, até que o lado $A'B'$ coincida com o lado AB, o que é possível, devido à hipótese. Sendo $\hat{A} = \hat{A}'$ (hip.) o lado $A'C'$ coincidirá em direção com o lado AC, e o ponto C' coincidirá com um ponto situado

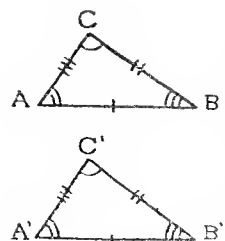


Fig. 39

em AC ou no seu prolongamento. Sendo $\hat{B} = \hat{B}'$ (hip.) o lado $B'C'$ coincidirá, em direção, com o lado BC, e o ponto C' coincidirá com um ponto situado em BC ou no seu prolongamento. Mas, se o ponto C' deve coincidir com um ponto situado em AC e um ponto situado em BC, é claro que ele coincide com o ponto C, que é o único ponto comum aos lados AC e BC. Ora, se os três vértices do $\triangle A'B'C'$ coincidem com os três vértices do $\triangle ABC$, estes dois \triangle coincidem e são, por consequência, iguais. (§163)

Observação. Feita a coincidência dos dois \triangle , e sendo $AB = A'B'$, vemos que $\hat{C} = \hat{C}'$; sendo $\hat{A} = \hat{A}'$, vemos que $BC = B'C'$; sendo $\hat{B} = \hat{B}'$, vemos que $AC = A'C'$. Donde resulta que:

Quando dois \triangle são iguais, a lados iguais se opõem \angle iguais, e a \angle iguais se opõem lados iguais.

Quando dois \triangle são iguais, é conveniente marcar os elementos iguais, nos dois \triangle . (fig. 39) Sendo $AB = A'B'$, marcaremos estes dois lados com um traço, e os \angle opostos a estes dois lados, isto é, os $\angle C$ e C' , serão então marcados com um arco. Os lados BC e $B'C'$ são iguais e estão marcados com dois traços; então os $\angle A$ e A' , que se opõem a estes dois lados, serão marcados com dois arcos. E os lados AC e $A'C'$ sendo marcados com três traços, os $\angle B$ e B' , que se opõem a estes dois lados, serão marcados com três arcos.

SEGUNDO CASO. Dois triângulos são iguais quando têm dois lados iguais, cada um a cada um, e o ângulo formado pelos dois lados do primeiro, é igual ao ângulo formado pelos dois lados do segundo.

$$H. \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \quad T. \begin{cases} \triangle ABC = \triangle A'B'C' \end{cases}$$

Façamos o $\triangle A'B'C'$ (fig. 39) deslizar no plano em que está situado, até que o lado $A'B'$ coincida com o lado AB, o que é possível, devido à hipótese. Sendo $A = \hat{A}$ (hip.) o lado $A'C'$ coincide em direção com o lado AC. Mas, $AC = A'C'$ (hip.) e o ponto A' está sobre o ponto A; assim o ponto C' coincide com o ponto C. Ora, se os três vértices do $\triangle A'B'C'$ coincidem com os três vértices do $\triangle ABC$, estes dois \triangle coincidem e são, por consequência, iguais. (§ 163)

TERCEIRO CASO. Dois triângulos são iguais quando os três lados de um são iguais, cada um a cada um, aos três lados do outro. (fig. 40)

$$H. \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \quad T. \begin{cases} \triangle ABC = \triangle A'B'C' \end{cases}$$

Sendo $AB = A'B'$ (hip.) os dois \triangle podem ser colocados na posição indicada. (fig. 40)

Tracemos o segmento CC' .

Sendo $AC = A'C'$ (hip.) o $\triangle CAC'$ é isósceles; logo, $\hat{1} = \hat{2}$.

Sendo $BC = B'C'$ (hip.) o $\triangle CBC'$ é isósceles; logo, $\hat{3} = \hat{4}$.

Portanto, ..

$$\hat{1} + \hat{3} = \hat{2} + \hat{4} \quad \therefore \hat{ACB} = \hat{A'C'B'}$$

Neste caso, os $\triangle ABC$ e $A'B'C'$ têm:

$$AC = A'C' \quad BC = B'C' \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

Logo, são iguais de acordo com o segundo caso de igualdade de \triangle quaisquer.

De acordo com os três casos de igualdade de \triangle , para que dois \triangle sejam iguais é necessário que três elementos de um deles sejam iguais a três elementos do outro; mas esta condição necessária não é suficiente; os seis elementos que se supõem respectivamente iguais não devem ser todos angulares.

TEOREMA. Quando dois triângulos têm dois lados iguais, cada um a cada um, e o ângulo formado pelos dois lados do primeiro não é igual ao ângulo formado pelos dois lados do segundo, então os terceiros lados não são iguais, e ao ângulo maior se opõe o lado maior. (fig. 41)

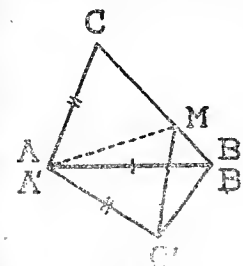


Fig. 41

$$H. \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} > \hat{A}' \end{cases} \quad T. \begin{cases} BC > B'C' \end{cases}$$

Sendo $AB = A'B'$ (hip.) os dois \triangle podem ser colocados na posição indicada. (fig. 41)

Tracemos a bissetriz do $\angle CAC'$. Sendo $\hat{C}AB$ ou $\hat{A} > \hat{B}'\hat{A}'C'$ ou \hat{A}' (hip.), a bissetriz do $\angle CAC'$, isto é, AM, ficará situada necessariamente no interior do $\angle CAB$. E sendo AM a bissetriz do $\angle CAC'$, segue-se que $\hat{C}AM = \hat{M}AC'$. Comparemos os $\triangle CAM$ e $\triangle MAC'$.

$$\begin{array}{l|l} AC = AC' \text{ (hip.)} & \triangle CAM = \triangle MAC' \text{ (2.º caso) } \dots \\ AM = AM & \\ \hat{C}AM = \hat{M}AC' & CM = MC' \end{array}$$

Sendo o segmento retilíneo BC' , a menor distância entre os pontos B e C' , teremos:

$$BC' < BM + MC'$$

Porém, $MC = MC'$, como ficou provado. Logo,

$$BC' < BM + MC \dots BC' < BC$$

$$B'C' < BC \dots BC > B'C'$$

RECÍPROCA. Quando dois triângulos têm dois lados iguais, cada um a cada um, e os terceiros lados desiguais, então os ângulos opostos a estes terceiros lados são desiguais e o ângulo maior é o que se opõe ao lado maior.

Para demonstrar esta recíproca é inútil fazer a figura, porque já aprendemos a designar convenientemente os lados e os \angle de um \triangle . (§93)

Vamos demonstrar esta recíproca pelo método de redução ao absurdo, isto é, negando a tese.

H. $\left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \\ c > c' \end{array} \right.$ Suponhamos $\hat{C} = \hat{C}'$. Então $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, de acordo com o segundo caso de igualdade, donde resulta $c = c'$, o que é absurdo, por ser contrário à hipótese.

Suponhamos $\hat{C} < \hat{C}'$. Teremos $c < c'$, de acordo com o teorema direto, o que é também absurdo, por ser contrário à hipótese.

Ora, se não é possível $\hat{C} = \hat{C}'$ ou $\hat{C} < \hat{C}'$, resulta $\hat{C} > \hat{C}'$.

Observação. Recomendamos vivamente aos srs. professores os exercícios da série XLIV do livrinho *Exercícios de Matemática - Terceiro Ano*, ns. 1 a 12.

Este pequeno esforço será largamente recompensado; os estudantes terão o prazer de demonstrar numerosos teoremas dos capítulos que se vão seguir, sem o auxílio do professor ou do compêndio.

E' indispensável o conhecimento da seguinte

Regra. Para demonstrar que dois segmentos retilíneos ou dois \angle são iguais, procuram-se dois \triangle dos quais estes dois segmentos ou \angle façam parte, procura-se demonstrar que os dois \triangle são iguais e marcam-se os elementos iguais. (§97) Se estes \triangle não existem, traça-se uma linha de construção, em condições convenientes.

98. Igualdade de triângulos retângulos. A igualdade dos \triangle retângulos é determinada pelos três casos de igualdade de \triangle quaisquer. (§97) Entretanto, dois \triangle retângulos, têm sempre um elemento igual que é o \angle reto. Dêste fato resultam, para os \triangle retângulos, dois casos especiais de igualdade.

PRIMEIRO CASO. Dois triângulos retângulos são iguais quando têm a hipotenusa igual e um cateto igual.

Sendo $AC = A'C'$ (hip.) os dois \triangle podem ser colocados na posição indicada. (fig. 42) Temos $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$ (hip.). Os $\angle A$ e A' sendo retos, são supls.; estando na posição de adjacentes, seus lados exteriores, AB e $A'B'$, estão em linha reta. Mas, as oblíquas BC e $B'C'$ sendo iguais, (hip.) seus pés B e B' distam igualmente do pé da $\perp AB$; logo, $AB = A'B'$ (§89, 2.ª recíproca). Donde resulta que $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. (§97, 3.º caso)

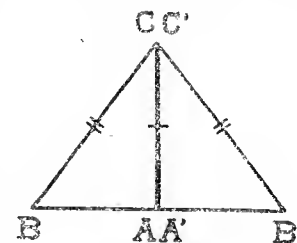


Fig. 42

SEGUNDO CASO. Dois triângulos retângulos são iguais quando têm a hipotenusa igual e um ângulo agudo igual.

$$\begin{array}{l} \text{H. } \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' = 1 \text{ reto} \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right. \quad \text{T. } \left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC = \triangle A'B'C' \end{array} \right. \end{array}$$

Façamos o $\triangle A'B'C'$ (fig. 43) deslizar no plano em que está situado, até que a hipotenusa $B'C'$ coincida com a hipotenusa BC , o que é possível, devido à hipótese. Sendo $\hat{C} = \hat{C}'$, o cateto $C'A'$ coincidirá, em direção, com o cateto CA , e o ponto A' deverá coincidir com um ponto qualquer situado em CA , ou no seu prolongamento.

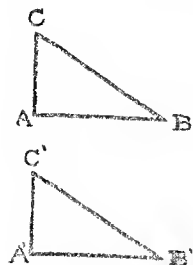


Fig. 43

Ora, sendo BA e $B'A'$, \perp , respectivamente, a AC e $A'C'$, e estando o ponto B sobre o ponto B' , as \perp BA e $B'A'$ coincidem em direção. (§89, teorema fundamental) Logo, o ponto A' deverá coincidir com um ponto situado em BA , ou no seu prolongamento. Então, o ponto A' coincide com o ponto A . $\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'$. (§ 163)

99. A bissetriz e suas propriedades. TEOREMA. *Qualquer ponto situado na bissetriz de um ângulo, dista igualmente dos lados deste ângulo.*

Seja o $\angle MON$ (fig. 44) e tracemos a sua bissetriz OS . (§87) Tomemos um ponto qualquer A , situado na bissetriz e tracemos as \perp AB e AC .

$$H. \begin{cases} \hat{1} = \hat{2} \\ AB \perp OM \\ AC \perp ON \end{cases} \quad T. \begin{cases} AB = AC \end{cases}$$

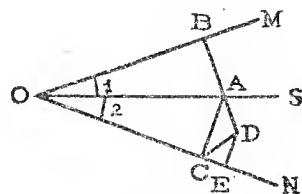


Fig. 44

Comparemos os $\triangle AOB$ e AOC . O $\angle ABO$ é reto porque $AB \perp OM$, e o $\angle ACO$ também é reto porque $AC \perp ON$; logo, os $\triangle AOB$ e AOC são retângulos. Mas eles têm a hipotenusa igual e um ângulo agudo igual, a saber $\hat{1} = \hat{2}$. Nestas condições $\triangle ABO = \triangle ACO$. (§98, 2.º caso) E lembrando que em \triangle iguais, a \angle iguais se opõem lados iguais, conclue-se que os lados AB e AC , que se opõem aos \angle iguais 1 e 2, são iguais. Ora, AB e AC representam as distâncias do ponto A às semirretas OM e ON (§89); portanto, qualquer ponto da bissetriz de um \angle dista igualmente dos lados deste mesmo \angle .

TEOREMA RECÍPROCO. *Qualquer ponto equidistante dos lados de um ângulo está situado na bissetriz deste ângulo.*

Seja o $\angle MON$ (fig. 54) e suponhamos um ponto A , equidistante dos lados deste mesmo \angle . As distâncias do ponto A aos lados do $\angle MON$ são os segmentos AB e AC , respectivamente \perp aos lados OM e ON . E estes dois segmentos são, por hipótese, iguais.

$$H. \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp OM \\ AC \perp ON \end{cases} \quad T. \begin{cases} \text{O ponto } A \text{ está} \\ \text{na bissetriz do} \\ \angle MON. \end{cases}$$

Liguemos o ponto A ao vértice do $\angle MON$ e comparemos os $\triangle AOB$ e AOC ; são retângulos (hip.); têm a hipotenusa igual AO , e um cateto igual, isto é, $AB = AC$. Logo, $\triangle AOB = \triangle AOC$. (§98, 1.º caso) Ora, em \triangle iguais, a lados iguais se opõem \angle iguais; os \angle 1 e 2, que se opõem aos lados iguais AB e AC , são iguais. Sendo $\hat{1} = \hat{2}$, a semirreta OA ou OS é realmente a bissetriz do $\angle MON$.

TEOREMA CONTRÁRIO. *Um ponto que não está situado na bissetriz de um ângulo, não é equidistante dos lados deste ângulo.*

Seja D (fig. 44) um ponto que não está situado na bissetriz OS do $\angle MON$. Tracemos os segmentos DE e DB , respectivamente \perp aos lados do $\angle MON$. Então estes dois segmentos representam as distâncias do ponto D , aos lados do $\angle MON$.

$$H. \begin{cases} \text{O ponto } D \text{ não está na} \\ \text{bissetriz do } \angle MON. \\ \hat{1} = \hat{2} \\ DB \perp OM, DE \perp ON. \end{cases} \quad T. \begin{cases} DB > DE \end{cases}$$

Se o ponto D não está na bissetriz do $\angle MON$, uma das \perp , DB , corta necessariamente a bissetriz OS , num certo ponto A . Tracemos $AC \perp ON$ e liguemos o ponto C ao ponto D .

Sendo $DE \perp ON$, então DC é oblíqua a ON . Onde

$$DE < DC \quad (I)$$

Do $\triangle ADC$ deduzimos que

$$DC < AC + AD \quad (II)$$

Combinando as desigualdades I e II, teremos :

$$DE < DC < AC + AD \quad (III)$$

Porém $AC = AB$, porque o ponto A está na bissetriz do $\angle MON$. Logo, substituindo AC por AB na desigualdade III,

$$DE < DC < AB + AD \quad \dots$$

$$DE < DC < DB \quad \dots$$

$$DE < DB$$

100. A bissetriz é um lugar geométrico. Ficou demonstrado que um ponto qualquer A, (fig. 44) situado na bissetriz OS, dista igualmente dos lados do $\angle MON$, e reciprocamente, um ponto A, equidistante dos lados do $\angle MON$, está situado na bissetriz deste mesmo \angle . Ficou também provado que um ponto não situado na bissetriz do $\angle MON$, não é equidistante dos lados do mesmo \angle . Portanto, todos os pontos da bissetriz do $\angle MON$ gozam de uma determinada propriedade, propriedade esta que não pertence, absolutamente, aos pontos situados fora da bissetriz. Logo, a bissetriz de um \angle é um lugar geométrico; é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um \angle .

O lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um ângulo é a bissetriz deste mesmo ângulo.

Quando, na resolução de um problema qualquer de Geometria, necessitarmos de um ponto equidistante dos lados de um \angle , não devemos hesitar; tracemos imediatamente a bissetriz deste \angle , porque é nela, e somente nela, que existem pontos equidistantes dos lados deste mesmo \angle .

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIV.

101. **Definição de paralelas.** Duas retas são paralelas quando, sendo complanares, (*) não têm nenhum ponto comum. As retas AB e CD (fig. 45) são complanares: supondo que não tenham nenhum ponto comum, embora prolongadas indefinidamente,

(*) E. M. P. V. § 26.

mente, serão \parallel . Da definição de retas \parallel resulta que duas retas \parallel não têm nenhum ponto comum; mas esta condição não é suficiente; a definição exige também que as duas retas sejam complanares. Em uma sala de aula é fácil apontar duas retas que, embora indefinidamente prolongadas, não se encontram, isto é, não têm nenhum ponto comum; uma das quinas da mesa do professor e a intersecção de duas paredes; entretanto, não são \parallel porque não estão situadas no mesmo plano; não são complanares.

Às vezes, será necessário dizer que duas \parallel se encontram no infinito, têm um ponto comum situado no infinito. Entretanto, isto não irá de encontro à definição de retas \parallel , porque este ponto fica tão distante...

102. **Teoremas relativos às paralelas.** Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.

Sejam as retas AB e CD (fig. 45) \perp à reta MN. Se não fossem \parallel elas se encontrariam em um certo ponto X e, por este ponto X, teríamos duas retas ABX e CDX, \perp a uma mesma reta MN, o que não pode ser. (§ 89) Logo...

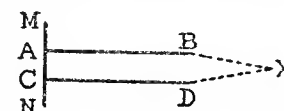


Fig. 45

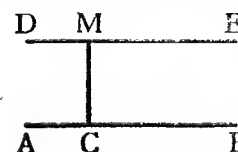


Fig. 46

COROLÁRIO. Por um ponto dado e situado fora de uma reta dada é sempre possível traçar uma paralela à reta dada.

Seja AB a reta dada e M o ponto dado. (fig. 46) Pelo ponto M traça-se $MC \perp AB$, e pelo ponto M traça-se $DE \perp MC$. As retas DE e AB, sendo \perp à mesma reta MC, são \parallel .

Postulado de Euclides. Por um ponto dado e situado fora de uma reta dada, podemos traçar somente uma \parallel à reta dada.

Vimos que, pelo ponto M, é sempre possível traçar uma \parallel à reta AB. Entretanto, não é possível traçar pelo ponto M uma segunda reta que seja também \parallel à mesma reta AB. Esta última verdade da Geometria, Euclides não conseguiu demonstrá-la e então pediu aos seus contemporâneos que a aceitassem como evidente e, portanto, sem demonstração.

Observação. *Postulatum*, do latim *postulare*, isto é, *pedir*. Euclides foi um geômetra grego que viveu em Alexandria no século III antes da era cristã. Os contemporâneos de Euclides quiseram demonstrar o célebre postulado e não o conseguiram; os nossos contemporâneos demonstraram a sua indemonstrabilidade.

O que nós enunciamos hoje como *postulado de Euclides*, não é exatamente o que Euclides pediu; veremos adiante a verdadeira forma d'este postulado.

Do postulado de Euclides resultam três corolários.

Primeiro corolário. Duas retas \parallel a uma terceira são \parallel .

Suponhamos $AB \parallel MN$ e $CD \parallel MN$. (fig. 47) Vamos provar que as

retas AB e CD são \parallel . Com efeito, se não fossem \parallel , elas se encontrariam em um ponto X , e então, pelo ponto X , teríamos duas retas, ABX e CDX , \parallel a uma mesma reta MN , o que não pode ser porque é contrário ao postulado de Euclides. Logo...

Segundo corolário. Quando duas retas são \parallel , qualquer reta que corta a primeira, corta também a segunda.

Suponhamos $AB \parallel CD$ (fig. 48) e seja OP uma reta que corta AB no ponto P . Vamos provar que a reta OP corta também a reta CD . Com efeito, se OP não cortasse CD , se OP fosse \parallel à CD , teríamos então, pelo ponto P , duas retas AB e OP , \parallel a uma mesma reta CD , o que não pode ser porque é contrário ao postulado de Euclides. Logo...

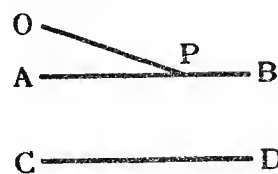


Fig. 48

Terceiro corolário. Quando duas retas são \parallel , toda \perp a uma, é também \perp à outra.

Suponhamos $CD \parallel AB$, e $MP \perp CD$. Vamos provar que $MP \perp AB$. Negando a tese, admitamos que AB não é \perp MP ; então, pelo ponto P , tracemos $A'B' \perp MP$. Duas retas \perp a uma mesma reta são \parallel ; logo, $CD \parallel A'B'$.

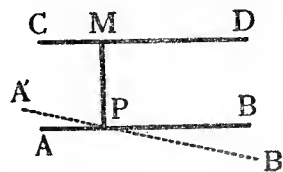


Fig. 49

Mas, $CD \parallel AB$ (hip.). Logo, pelo ponto P temos duas retas distintas, AB e $A'B'$, ambas \parallel a uma mesma reta, CD ,

o que não pode ser. (postulado de Euclides) Donde resulta que $A'B'$ coincide com AB , isto é, $AB \perp MP$.

103. Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal. Chama-se *transversal* ou *secante* (do latim *secare*, cortar) a reta que corta uma figura geométrica qualquer. Quando duas retas quaisquer AB e CD (fig. 50) são cortadas por uma secante MN , formam-se oito \angle que têm denominações particulares.

Os $\angle a, b, c, d$, são chamados *internos*, em relação às duas retas AB e CD cortadas pela transversal MN ; os $\angle g, e, f, h$, são chamados *externos*. Os $\angle a, d, g, f$, estão situados de *um lado* da transversal, ao passo que os $\angle b, c, e, h$, estão situados *do outro lado* da mesma transversal.

Ângulos alternos-internos são os \angle internos, situados de um lado e do outro da transversal, e não adjacentes. Os $\angle a$ e b são alternos-internos, assim como os $\angle c$ e d .

Ângulos alternos-externos são os \angle externos, situados de um lado e do outro da transversal, e não adjacentes. Os $\angle e$ e f são alternos-externos, assim como os $\angle g$ e h .

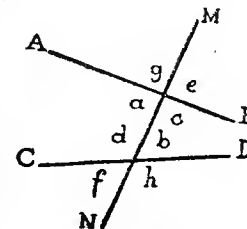


Fig. 50

Ângulos correspondentes são os \angle situados do mesmo lado da transversal, um interno e outro externo, e não adjacentes. Os $\angle a$ e f são correspondentes, assim como os $\angle c$ e h , d e g , b e e .

Ângulos colaterais-internos, são os \angle internos situados do mesmo lado da transversal. Os $\angle a$ e d são colaterais-internos, assim como os $\angle b$ e c .

Ângulos colaterais-externos são os \angle externos situados do mesmo lado da transversal. Os $\angle e$ e h são colaterais-externos, assim como os $\angle f$ e g .

Os oito \angle formados pelas retas AB e CD , quando cortadas pela transversal MN , em geral não são \angle retos; são agudos ou obtusos, sendo *quatro agudos* e *quatro obtusos*. Se o $\angle a$ é agudo, seus suplementos, os $\angle c$ e g , são obtusos; e o $\angle e$ sendo

igual ao $\angle a$, por serem o. p. v. é também agudo. O mesmo acontece com os $\angle b, d, f, h$.

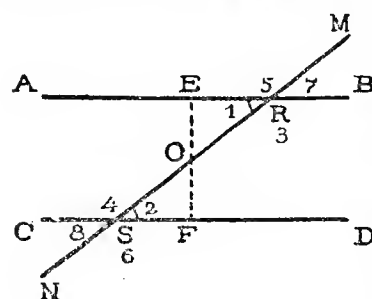


Fig. 51

TEOREMA. Quando duas paralelas são cortadas por uma transversal, os quatro ângulos agudos são iguais, assim como os quatro ângulos obtusos.

Sejam AB e CD as duas \parallel e MN a transversal. Pelo ponto O, centro do segmento RS, tracemos o segmento EF \perp AB. O segmento EF será também \perp CD. (terceiro corolário do postulado de Euclides) Comparemos os $\triangle ROE$ e $\triangle SOF$. São \triangle retângulos porque EF é \perp às \parallel AB e CD; suas hipotenusas, OR e OS, são iguais por construção; $\hat{ROE} = \hat{SOF}$. (o. p. v.) Logo, $\triangle ROE = \triangle SOF$. (§101, 2.º caso) Donde resulta que $\hat{1} = \hat{2}$. Porém $\hat{1} = \hat{7}$ e $\hat{2} = \hat{8}$. (o. p. v.) Então, $\hat{1} = \hat{2} = \hat{7} = \hat{8}$. E estes quatro \angle sendo iguais, os seus suplementos, isto é, $\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$ e $\hat{6}$, são também iguais.

COROLÁRIO. Quando duas paralelas são cortadas por uma transversal,

- I. Os ângulos alternos-internos são iguais.
- II. Os ângulos alternos-externos são iguais.
- III. Os ângulos correspondentes são iguais.
- IV. Os ângulos colaterais-internos são suplementares.
- V. Os ângulos colaterais-externos são suplementares.

Já vimos que $\hat{1} = \hat{2}$ e $\hat{3} = \hat{4}$; portanto o número I está demonstrado. Vimos também que $\hat{5} = \hat{6}$ e $\hat{7} = \hat{8}$; logo o número II está também demonstrado. Vimos ainda que $\hat{1} = \hat{8}$, $\hat{3} = \hat{6}$, $\hat{2} = \hat{7}$ e $\hat{4} = \hat{5}$; o número III também está demonstrado. Restamos demonstrar os números IV e V.

Os $\angle 1$ e 3 são supls. (§86), isto é, $\hat{1} + \hat{3} = 2$ retos. Nesta igualdade podemos substituir $\hat{3}$ por $\hat{4}$, porque são iguais. Logo,

$\hat{1} + \hat{4} = 2$ retos, isto é, estes dois \angle col.-int. são supls. De modo análogo provaríamos que os \angle col.-int. 3 e 2 são também supls.

Os $\angle 5$ e 7 são supls. (§86), isto é, $\hat{5} + \hat{7} = 2$ retos. Nesta igualdade podemos substituir $\hat{5}$ por $\hat{6}$, porque são iguais. Logo, $\hat{6} + \hat{7} = 2$ retos, isto é, estes dois \angle col.-ext. são supls. De modo análogo provaríamos que os \angle col.-ext. 5 e 8 são supls.

O teorema que acabamos de demonstrar e seu corolário nos conduziram a cinco conclusões distintas. Por consequência, temos de demonstrar agora cinco recíprocas.

Primeira recíproca. Se os \angle alt.-int. formados por duas retas cortadas por uma transversal são iguais, estas duas retas são \parallel .

Segunda recíproca. Se os \angle alt.-ext. formados por duas retas cortadas por uma transversal são iguais, estas duas retas são \parallel .

Terceira recíproca. Se os \angle correspondentes formados por duas retas cortadas por uma transversal são iguais, estas duas retas são \parallel .

Quarta recíproca. Se os \angle col.-int. formados por duas retas cortadas por uma transversal, são supls. estas duas retas são \parallel .

Quinta recíproca. Se os \angle col.-ext. formados por duas retas cortadas por uma transversal, são supls. estas duas retas são \parallel .

Vamos demonstrar a primeira recíproca pela redução ao absurdo. As outras se demonstrarão de modo análogo.

$$H. \{ \hat{1} = \hat{2} \quad T. \{ AB \parallel CD$$

Admitamos, negando a tese, que AB não é \parallel CD. (fig. 52) Pelo ponto S tracemos $C'D' \parallel AB$. Se estas duas retas são \parallel , teremos $\hat{1} = \hat{3}$, porque são dois \angle alt.-int., formados pelas \parallel AB e $C'D'$, cortadas pela transversal MN. (O $\angle 3$ é o $\angle RSD'$.)

De acordo com a hipótese, $\hat{1} = \hat{2}$. Ora, sendo $\hat{1} = \hat{3}$ e $\hat{1} = \hat{2}$, resulta que $\hat{2} = \hat{3}$. Mas esta igualdade é um absurdo. Se a negação da tese nos conduziu a um absurdo, e se não há outra maneira de negá-la, forçoso é admitir que $AB \parallel CD$.

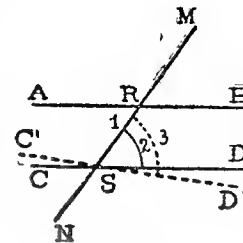


Fig. 52

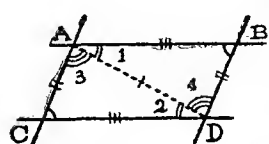
104. O verdadeiro postulado de Euclides. Considere-mos as retas AB e CD, cortadas pela transversal MN. (fig. 50) Se as retas AB e CD não são \parallel , elas se encontram. Onde? De que lado da transversal? E' Euclides quem responde no seu famoso *Postulatum*.

Axioma n.º 11 dos "Elementos" de Euclides. Quando duas retas são cortadas por uma transversal, estas duas retas se encontram sempre do lado em que a soma dos ângulos colaterais-internos é menor do que dois ângulos retos.

Se estes dois \angle forem suplementares, os outros dois colaterais-internos, situados do outro lado da transversal, também serão suplementares e, neste caso, onde se encontrarão as retas AB e CD, que são duas retas distintas? Ou não se encontram, ou deverão encontrar-se em dois pontos X e Y, situados respectivamente de um lado e do outro da transversal MN, e a uma distância infinitamente grande desta transversal. Então as retas AB e CD, sendo coplanares e encontrando-se no infinito, são \parallel .

105. Porções de paralelas entre paralelas. Sejam duas \parallel AB e CD, cortadas por outras duas \parallel AC e BD. (fig. 53)

TEOREMA. Porções de paralelas entre paralelas são iguais.



H. $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AC \parallel BD \end{cases}$ T. $\begin{cases} AB=CD \\ AC=BD \end{cases}$

Tracemos o segmento AD e comparemos os $\triangle ABD$ e ACD .

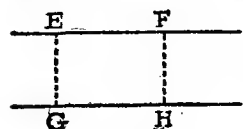


Fig. 53

$AD = AD$

$\hat{1} = \hat{2}$ (alt.-int. formados pelas \parallel AB e CD, etc.)

$\hat{3} = \hat{4}$ (alt.-int. formados pelas \parallel AC e BD, etc.)

$\triangle ABD = \triangle ACD$ (1.º caso de igualdade de \triangle quaisquer)

Completando a marcação teremos $AB=CD$ e $AC=BD$.

COROLÁRIO. Duas paralelas são eqüidistantes.

Consideremos as \parallel EF e GH. (fig. 53) Se, por um ponto qualquer E, da primeira, traçarmos o segmento $EG \perp$ à segunda, este segmento EG será a distância do ponto E à reta GH, ou do ponto G à reta EF. Análogamente o segmento FH, sendo

\perp à GH, e, portanto, à EF (3.º corolário do postulado de Euclides) será a distância do ponto F à reta GH, ou do ponto H à reta EF. (§ 89, 1.º teorema) Ora:

Distância de duas paralelas é o comprimento do segmento \perp às duas, e por elas limitado. Mas, duas \perp a uma mesma reta são \parallel . (§ 101) Então EG e FH, sendo \perp à GH, são \parallel . Mas, porções de \parallel entre \parallel são iguais. Logo, $EG=FH$, isto é, duas \parallel são eqüidistantes.

106. Mais um lugar geométrico. Vamos resolver mais um problema de Geometria: dada uma reta AB, (fig. 54) determinar um ponto situado a 5cm de AB. Por um ponto qualquer C, tracemos $CX \perp AB$. Em seguida, marquemos em CX dois segmentos, CD e CD' com 5cm, e pelos pontos D e D' tracemos MN e M'N' \parallel AB. Desde que duas \parallel são eqüidistantes, qualquer ponto da reta MN ou M'N' dista 5cm da reta AB, e é, portanto, uma solução do problema proposto. E fora das retas MN e M'N', \parallel à reta AB, não existem pontos cuja distância à reta AB seja igual a 5cm. Com efeito, sendo, com evidência, $CE > CD$, a distância do ponto E à reta AB é superior a 5cm; sendo, com evidência, $CE' < CD$, a distância do ponto E' à reta AB é inferior a 5cm.

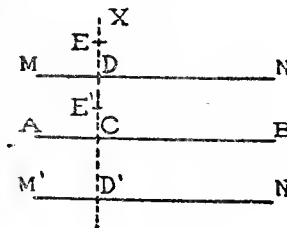


Fig. 54

Ora, desde que qualquer ponto situado nas retas MN e M'N' \parallel AB, dista 5cm de AB, e desde que fora das retas MN e M'N' não existem pontos situados a 5cm de AB, conclue-se que estas duas retas MN e M'N' constituem um lugar geométrico.

O lugar geométrico dos pontos de um plano, situados a uma distância dada, de uma reta dada neste mesmo plano, é constituído por duas paralelas à reta dada.

Exercícios em classe

1. Dada uma reta AB e dois pontos P e Q situados fora da reta AB, determinar um ponto eqüidistante dos pontos P e Q, e situado a 2cm da reta AB.
2. Traçar um \angle MON com 45° e uma reta qualquer AB. Determinar um ponto situado a 2cm da reta AB, e eqüidistante dos lados do \angle MON.

3. Determinar um ponto situado a 3cm de duas retas AB e CD que se cortam.

107. Ângulos cujos lados são paralelos. Consideremos os $\angle ABC$ e $\angle MON$, cujos lados são \parallel , isto é, $AB \parallel MO$ e $BC \parallel NO$. (fig. 55)

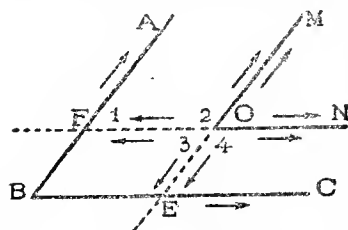


Fig. 55

(correspondentes formados pelas $\parallel BC$ e FN , cortadas pela transversal AB);

$\hat{O} = \hat{1}$ (correspondentes formados pelas $\parallel AB$ e EM cortadas pela transversal FN). De $\hat{B} = \hat{1}$ e $\hat{O} = \hat{1}$ deduzimos $\hat{B} = \hat{O}$. Portanto, estes dois \angle , tendo seus lados \parallel , são iguais. E observe-se que as semirretas $\parallel BA$ e OM estão dirigidas no mesmo sentido, assim como as semirretas $\parallel BC$ e ON .

Observação. Sentido de uma semirreta é o sentido do movimento de um ponto que, partindo da origem da semirreta, percorre esta mesma semirreta, afastando-se da origem. Nós indicamos o sentido de uma semirreta com uma seta. (fig. 55) As semirretas $\parallel BC$ e ON são do mesmo sentido; as semirretas $\parallel BC$ e OF são de sentidos contrários.

Entretanto, os $\angle B$ e 2 também têm seus lados \parallel . Provamos que $\hat{B} = \hat{O}$. Já sabemos que $\hat{2} + \hat{O} = 2 \text{ retos}$. (§ 86) Logo, $\hat{2} + \hat{B} = 2 \text{ retos}$, isto é, os $\angle B$ e 2 , tendo seus lados \parallel , são supls. E observe-se que as semirretas $\parallel BA$ e OM estão dirigidas no mesmo sentido, ao passo que as semirretas $\parallel BC$ e OF estão dirigidas em sentidos contrários.

Os $\angle B$ e 3 também têm seus lados \parallel . Já vimos que $\hat{B} = \hat{O}$. E sendo $\hat{3} = \hat{O}$ (o. p. v.) segue-se que $\hat{B} = \hat{3}$, isto é, os $\angle B$ e 3 , tendo seus lados \parallel , são iguais. E observe-se que as semirretas $\parallel BA$ e OE , estão dirigidas em sentidos contrários, assim como as semirretas $\parallel BC$ e OF .

Finalmente, os $\angle B$ e 4 também têm seus lados \parallel . Já vimos que $\hat{B} = \hat{O}$. E sendo $\hat{4}$ suplemento de \hat{O} , $\hat{4}$ será também su-

TEOREMA. Dois ângulos cujos lados são paralelos, são iguais ou suplementares.

Prolonguemos as semirretas OM e ON até encontrarem as semirretas BA e BC , respectivamente nos pontos F e E . Teremos: $\hat{B} = \hat{1}$

plemento de \hat{B} , isto é, os $\angle B$ e 4 , tendo seus lados \parallel , são supls. E observe-se que as semirretas $\parallel BC$ e ON estão dirigidas no mesmo sentido, ao passo que as semirretas $\parallel BA$ e OE estão dirigidas em sentidos contrários.

Em resumo, quando dois \angle têm seus lados \parallel , são iguais ou supls. São iguais quando os lados \parallel se dirigem no mesmo sentido ou em sentidos contrários; é o que se dá com os $\angle B$ e O ou B e 3 . São supls. quando dois lados \parallel se dirigem no mesmo sentido, ao passo que os outros dois se dirigem em sentidos contrários; é o que se dá com os $\angle B$ e 2 , ou B e 4 .

Exercícios. Repetir esta demonstração considerando cada caso separadamente e fazendo a figura de acordo com o caso que se quer demonstrar.

108. Ângulos cujos lados são perpendiculares. Consideremos os $\angle 1$ e 2 cujos lados são \perp , isto é, $AB \perp EF$ e $BC \perp DE$. (fig. 56)

TEOREMA. Dois ângulos cujos lados são perpendiculares, são iguais ou suplementares.

$$H. \begin{cases} AB \perp EF \\ BC \perp ED \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} \hat{1} = \hat{2} \text{ ou} \\ \hat{1} + \hat{2} = 2 \text{ retos.} \end{cases}$$

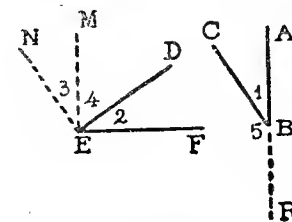


Fig. 56

Pelo vértice E do $\angle DEF$, tracemos as semirretas EN e EM , respectivamente \parallel às semirretas BC e BA , e

dirigidas no mesmo sentido. Então, $\hat{1} = \hat{3}$. (§ 107)

Sendo $EM \parallel AB$ (construção) e $EF \perp AB$ (hip.) então $EF \perp EM$. (Postulado de Euclides, 3.º corolário) Assim sendo, o $\angle MEF$ é um \angle reto ou $\hat{4} + \hat{2} = 1 \text{ reto}$.

Sendo $EN \parallel BC$ (construção) e $ED \perp BC$ (hip.) então $ED \perp EN$. (Postulado de Euclides, 3.º corolário) Assim sendo, o $\angle NED$ é um \angle reto ou $\hat{4} + \hat{3} = 1 \text{ reto}$.

Sendo $\hat{2}$ complemento de $\hat{4}$, e $\hat{3}$ também complemento de $\hat{4}$, segue-se $\hat{2} = \hat{3}$. Mas $\hat{3} = \hat{1}$. (construção) Logo, $\hat{1} = \hat{2}$.

Portanto, dois \angle cujos lados são \underline{h} , são iguais. Mas, $\hat{5}$ também tem seus lados \underline{h} aos lados de $\hat{2}$. E sendo $\hat{1} = \hat{2}$, e os \angle 1 e 5 sendo supls., conclue-se que o \angle 5 é suplemento do \angle 2. Nestas condições, dois \angle cujos lados são \underline{h} , são iguais ou supls.?

E' fácil distinguir. Se ambos são agudos não podem, evidentemente, ser supls.; então são iguais. O mesmo sucede quando ambos são obtusos; são também iguais. Entretanto, se um é agudo e o outro é obtuso, os dois são supls.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLV.

109. Soma dos ângulos de um triângulo. **TEOREMA.** *A soma dos três ângulos de um triângulo retilíneo é sempre igual a dois ângulos retos.*

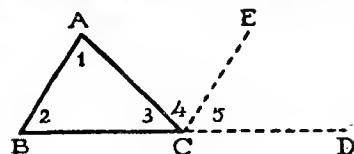


Fig. 57

H. $\{ \text{ABC é um } \Delta.$

T. $\{ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ retos.}$

Seja ABC (fig. 67) um Δ qualquer. Prolonguemos BC formando assim o \angle externo ACD. Pelo ponto C tracemos CE \parallel BA; fica assim

o \angle ACD dividido em dois \angle s, 4 e 5, em geral desiguais.

Já sabemos que $\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = 2 \text{ retos}$ (§86, 1.º corolário) Mas,

$\hat{4} = \hat{1}$ (alt.-int. formados pelas \parallel AB e CE cortadas, etc..)

$\hat{5} = \hat{2}$ (correspondentes formados pelas \parallel AB e CE, etc..)

Substituindo na primeira igualdade, teremos:

$$\hat{3} + \hat{1} + \hat{2} = 2 \text{ retos} \quad \therefore \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ retos}$$

Dêste teorema resultam numerosos corolários.

I. Dados dois Δ , ABC e A'B'C', se $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, então $\hat{C} = \hat{C}'$, isto é, quando dois Δ têm dois \angle s iguais, cada um a cada um, os terceiros \angle s são também iguais.

Graças a êste corolário, diremos daqui por diante que dois Δ são iguais quando têm um lado igual e dois \angle s quaisquer iguais, cada um a cada um. (§ 97, 1.º caso) Porque então os terceiros \angle s serão iguais e estarão preenchidas as condições exigidas pelo primeiro caso de igualdade de Δ .

II. O \angle externo de um Δ é igual à soma dos dois \angle s internos não adjacentes. Com efeito, sendo $\hat{4} = \hat{1}$ e $\hat{5} = \hat{2}$, conclue-se que $\hat{4} + \hat{5} = \hat{1} + \hat{2} \therefore \hat{ACD} = \hat{1} + \hat{2}$. (fig. 57)

III. O \angle externo de um Δ é maior do que qualquer um dos \angle s internos não adjacentes. Com efeito, sendo $\hat{ACD} = \hat{1} + \hat{2}$, segue-se que $\hat{ACD} > \hat{1}$ ou $\hat{ACD} > \hat{2}$. (fig. 57)

IV. Duas \parallel encontrando-se no infinito formam um \angle nulo. Sejam as \parallel AB e CD (fig. 45, §101) que se encontram em um ponto X situado no infinito (a uma distância infinita) formando o Δ ACX. Sendo NCX um \angle externo ao Δ ACX, teremos:

$$\hat{NCX} = \hat{CAX} + \hat{X}$$

Mas, a soma \hat{NCX} é igual a uma das parcelas \hat{CAX} . (São dois \angle s correspondentes formados pelas \parallel AX e CX, cortadas pela transversal MN.) Então, a outra parcela é nula, isto é, o \angle X é nulo.

V. Se um \angle de um Δ é obtuso, os outros dois são agudos. Com efeito, se um dos \angle s é maior do que um \angle reto, a soma dos outros dois é menor do que um \angle reto e, então, êles são agudos. Ao Δ que tem um \angle obtuso dá-se o nome de **triângulo obtusângulo**.

VI. Se um \angle de um Δ é reto, os outros dois são agudos e são compls. Desde que um dos \angle s é reto, a soma dos outros dois é igual a um \angle reto; portanto, êles são agudos e compls. Êste Δ é o **triângulo retângulo**.

VII. Os três \angle s de um Δ podem ser agudos. Dá-se a êste Δ o nome de **triângulo acutângulo**.

Os triângulos obtusângulos e acutângulos são chamados **triângulos obliquângulos**.

VIII. Em um Δ equilátero cada \angle vale dois terços de um \angle reto. (60° ou $66,666$ graus)

Exercício teórico. Dado um Δ ABC (fig. 57), prolongam-se os três lados nas seguintes condições: o lado AB, de A para B; o lado BC, de B para C; o lado CA, de C para A. Formam-se assim três \angle s externos. Provar que a soma dêstes três \angle s é igual a quatro \angle s retos.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLVI.

110. Os quadriláteros. *Quadrilátero é o polígono de quatro lados.* (§95)

Em um quadrilátero qualquer ABCD, dois lados que se encontram em um mesmo vértice, são chamados *consecutivos*; no caso contrário são chamados *opostos*. Os lados AB e AD ou BA e BC ou CB e CD ou DC e DA são consecutivos; os lados AB e CD são opostos, assim como os lados AD e BC. Análogamente, os vértices A e B, situados nas extremidades de um mesmo lado são vértices consecutivos; ao passo que os vértices A e C, não situados nas extremidades de um mesmo lado, são vértices opostos.

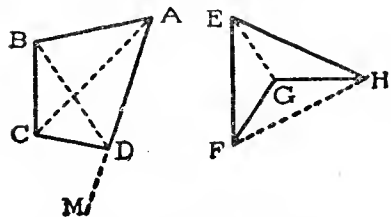


Fig. 58

Também os \angle são consecutivos ou opostos; os \angle A e B são consecutivos, ao passo que os \angle A e C são opostos.

Um quadrilátero (ou um polígono qualquer, excetuando o triângulo), pode ser *convexo* ou *côncavo*. É *convexo* quando, prolongando-se indefinidamente qualquer um de seus lados, nos dois sentidos, o quadrilátero fica situado de um mesmo lado deste lado prolongado; o quadrilátero ABCD é *convexo*. (fig. 58) É *côncavo* quando, prolongando-se indefinidamente qualquer um dos seus lados, nos dois sentidos, o quadrilátero fica situado dos dois lados deste lado prolongado; o quadrilátero EFGH é *côncavo*. Uma secante corta um quadrilátero convexo somente em dois pontos.

Um quadrilátero (ou um polígono qualquer, excetuando o triângulo) pode ser *plano* ou *reverso*. É *plano* quando todos os vértices estão situados no mesmo plano; é *reverso* no caso contrário. O quadrilátero ABCD é um quadrilátero plano. (fig. 58) Para compreender em que consiste um quadrilátero reverso, desenhemos o quadrilátero ABCD, recortemos a figura, tracemos a diagonal BD e, em seguida, coloquemos o quadrilátero sobre o plano do quadro-negro, de modo que o $\triangle BCD$ coincida inteiramente com o plano. Se não deixarmos o vértice A pousar no quadro negro, teremos diante dos olhos a imagem de um quadrilátero reverso.

O triângulo é sempre plano e convexo.

Observação. Nestas lições elementares de Geometria plana estudaremos somente polígonos convexos e planos.

111. Soma dos ângulos de um quadrilátero. É igual a quatro \angle retos, como é fácil demonstrar. Em um quadrilátero qualquer ABCD (fig. 58) traça-se uma diagonal BD; o quadrilátero fica decomposto em dois \triangle , ABD e CBD. A soma dos três \angle de um \triangle é igual a dois \angle retos (§112); portanto, a soma dos \angle dos \triangle ABD e CBD é igual a quatro \angle retos. Mas os \angle dos \triangle ABD e CBD são, evidentemente, os \angle do quadrilátero; logo...

112. O paralelogramo. Devido à natureza de seus elementos principais, isto é, lados e \angle , os quadriláteros têm denominações especiais: paralelogramo, retângulo, losango, quadrado, trapézio e quadrilátero qualquer.

Paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. Esta afirmação não é um *teorema*, não é uma verdade que exige demonstração é uma *definição*. A fig. ABCD (fig. 59) é um quadrilátero no qual os lados opostos

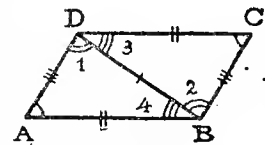


Fig. 59

são \parallel ; por este fato recebe o nome especial de *paralelogramo*. Se um quadrilátero dado é um \square , nós podemos afirmar que seus lados opostos são \parallel ; para provar que um quadrilátero é um \square , deveremos provar que seus lados opostos são \parallel .

TEOREMA. *Em um paralelogramo, os lados opostos são iguais, e os ângulos opostos são iguais.* (fig. 59)

$$H. \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} AB = CD & e & AD = BC \\ \hat{A} = \hat{C} & e & \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$$

Tracemos uma diagonal qualquer BD (§97, exercícios em classe, *regra*) e comparemos os \triangle ABD e BCD.

$$BD = BD$$

$$\hat{1} = \hat{2} \text{ (alt.-int. formados pelas } \parallel \text{ AD e BC, cortadas, etc..)}$$

$$\hat{3} = \hat{4} \text{ (alt.-int. formados pelas } \parallel \text{ AB e CD, cortadas, etc..)}$$

$$\triangle ABD = \triangle BCD \text{ (1.º caso de igualdade de } \triangle)$$

Completando a marcação dos elementos iguais (§97, fig. 39) teremos $AB = CD$, $AD = BC$ e $\hat{A} = \hat{C}$.

Resta provar que $\hat{B} = \hat{D}$. Já vimos que $\hat{1} = \hat{2}$ e $\hat{3} = \hat{4}$. Somando estas igualdades teremos $\hat{1} + \hat{3} = \hat{2} + \hat{4} \therefore \hat{B} = \hat{D}$.

O teorema que acabamos de demonstrar tem duas conclusões distintas: *em um \square os lados opostos são iguais*; *em um \square os \angle opostos são iguais*. Temos, pois, duas recíprocas a demonstrar.

PRIMEIRA RECÍPROCA. *Se os lados opostos de um quadrilátero são iguais, este quadrilátero é um paralelogramo.*

$$H. \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

Observação. Não esqueçamos que, para provar que um quadrilátero é um \square devemos provar que seus lados opostos são \parallel .

Consideremos o quadrilátero ABCD (fig. 59), tracemos a diagonal BD e comparemos os \triangle ABD e BCD.

$$AB = CD \text{ (hip.)}$$

$$AD = BC \text{ (hip.)}$$

$$BD = BD$$

$$\triangle ABD = \triangle BCD \text{ (3.º caso)}$$

Completando a marcação dos elementos iguais (§97, fig. 39) teremos:

$$\begin{aligned} \hat{1} &= \hat{2} \\ \hat{3} &= \hat{4} \end{aligned}$$

Temos $\hat{1} = \hat{2}$. Mas estes dois \angle são alt.-int. formados pelas retas AD e BC, cortadas pela secante BD; se êles, os \angle 1 e 2, são iguais, elas, as retas AD e BC, são \parallel . (§103, 1.ª recíproca)

Temos $\hat{3} = \hat{4}$. Mas estes dois \angle são alt.-int. formados pelas retas AB e CD, cortadas pela secante BD; se êles, os \angle 3 e 4 são iguais, elas, as retas AB e CD, são \parallel .

E, se os lados opostos do quadrilátero ABCD são \parallel , este quadrilátero é, por definição, um \square .

Observação. A demonstração desta recíproca nos ensina mais uma regra muito útil para demonstrar teoremas.

Regra. Para provar que duas retas são \parallel , prova-se que os \angle alt.-int. ou alt.-ext. ou correspondentes formados por estas retas quando cortadas por uma transversal, são iguais; ou então prova-se que os \angle col.-int. ou col.-ext. são supls..

SEGUNDA RECÍPROCA. *Se os ângulos opostos de um quadrilátero são iguais, este quadrilátero é um paralelogramo.*

$$H. \begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

Consideremos o quadrilátero ABCD. (fig. 59) Por hipótese...

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right\} \therefore \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} \quad \Bigg| \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{D} = \hat{B} \end{array} \right\} \therefore \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C}$$

Entretanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 4$ retos. (§111) Logo,
 $\hat{A} + \hat{B} = 2$ retos e $\hat{A} + \hat{D} = 2$ retos.

Os \angle A e B são supls. e são col.-int. formados pelas retas AD e BC, cortadas pela secante AB; se êles, os \angle A e B são supls., elas, as retas AD e BC, são \parallel . (§103, 4.ª recíproca)

Os \angle A e D são supls. e são col.-int. formados pelas retas AB e CD cortadas pela secante AD; se êles, os \angle A e D são supls., elas, as retas AB e CD são \parallel .

E, se os lados opostos do quadrilátero ABCD são \parallel , este quadrilátero é, por definição, um \square .

Observação. Um \square tem dois \angle agudos e dois \angle obtusos, sujeitos às relações já conhecidas: $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$, $\hat{A} + \hat{B} = 2$ retos, $\hat{A} + \hat{D} = 2$ retos, etc.. Como caso particular, os 4 \angle podem ser retos.

COROLÁRIO. *Se dois lados opostos de um quadrilátero são iguais e paralelos, este quadrilátero é um paralelogramo.*

$$H. \begin{cases} AB = CD \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} AD \parallel BC \end{cases}$$

Consideremos o quadrilátero ABCD. (fig. 59) Temos $AB \parallel CD$ (hip.); logo, para provar que este quadrilátero é um \square , é bastante provar que $AD \parallel BC$.

Tracemos a diagonal BD e comparemos os \triangle ABD e BCD.

$$AB = CD \text{ (hip.)}$$

$$BD = BD$$

$$\hat{4} = \hat{3} \text{ (alt.-int. formados pelas } \parallel \text{ AB e CD, cortadas, etc..)}$$

$$\triangle ABD = \triangle BCD \text{ (2.º caso de igualdade de } \triangle)$$

Completando a marcação dos elementos iguais, teremos $\hat{1} = \hat{2}$. Mas estes dois \angle são alt.-int. em relação às retas AD e

BC, cortadas pela secante BD. Se eles, os $\angle 1$ e 2 , são iguais, elas, as retas AD e BC, são \parallel .

E, se os lados opostos do quadrilátero ABCD são \parallel , este quadrilátero é, por definição, um \square .

Base de um \square é qualquer um de seus lados. Altura de um \square é o segmento retilíneo \perp à base, traçado por qualquer ponto da base oposta e limitado por estas mesmas bases.

Considerando o \square ABCD, se tomarmos o lado AB como base, a altura pode partir de qualquer ponto do lado CD.

Exercícios em classe

1. Provar que dois \square são iguais quando têm dois lados consecutivos iguais, cada um a cada um, e o \angle por eles formado também igual, isto é, $AB=A'B'$, $AD=A'D'$, $\hat{A}=\hat{A}'$. (fig. 59)

2. Dado um \square ABCD (fig. 59) tomar como base AB, traçar duas alturas, uma pelo ponto C e outra pelo ponto D e provar que são iguais.

3. Dado um \square ABCD (fig. 59) tomar como base o lado BC, traçar duas alturas, uma pelo ponto A e outra pelo ponto D e provar que são iguais.

4. Construir um \square ABCD sendo $AB=7\text{cm}$, $AD=5\text{cm}$ e $\hat{A}=48^\circ$.

5. Construir um \square ABCD sendo $AB=7\text{cm}$, $\hat{A}=64^\circ$, e sendo a altura relativa ao lado AB, igual a 5cm .

113. As diagonais do paralelogramo. Um \square qualquer ABCD (fig. 60) tem somente duas diagonais, AC e BD.

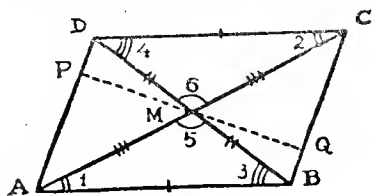


Fig. 60

TEOREMA. Em um paralelogramo as diagonais se dividem mutuamente em partes iguais.

$$H. \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} MA = MC \\ MB = MD \end{cases}$$

Consideremos o \square ABCD e tracemos as diagonais AC e BD, as quais se cortam no ponto M. Em seguida comparemos os \triangle AMB e CMD. (§97, exercícios em classe, regra)

$AB=CD$ como lados opostos de um \square

$\hat{1} = \hat{2}$ (alt.-int. formados pelas \parallel AB e CD, cortadas, etc..)

$\hat{3} = \hat{4}$ (alt.-int. formados pelas \parallel AB e CD, cortadas, etc..) \therefore

$$\triangle AMB = \triangle CMD \text{ (1.º caso de igualdade de } \triangle \text{)}$$

Dois \triangle sendo iguais, a lados iguais se opõem \angle iguais e reciprocamente. Logo, $MA=MC$ e $MB=MD$.

RECÍPROCA. Se as diagonais de um quadrilátero se dividem mutuamente em partes iguais, este quadrilátero é um paralelogramo.

$$H. \begin{cases} MA = MC \\ MB = MD \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} AD \parallel BC \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

Consideremos o quadrilátero ABCD (fig. 60) e tracemos as diagonais AC e BD, as quais se cortam no ponto M. Em seguida, comparemos os \triangle AMB e CMD. (§112, regra)

$$MA = MC \text{ (hip.)}$$

$$MB = MD \text{ (hip.)}$$

$$\hat{5} = \hat{6} \text{ (o. p. v.)}$$

$$\triangle AMB = \triangle CMD \text{ (2.º caso)}$$

Completando a marcação tere-

mos $\hat{1}=\hat{2}$, $\hat{3}=\hat{4}$ e $AB=CD$. Mas

os \angle 1 e 2 são alt.-int. formados

pelas retas AB e CD, cortadas pela

transversal AC. Se eles, os \angle 1

e 2, são iguais, elas, as retas AB

e CD são \parallel . (§103. 1.ª recíproca) Provamos também que $AB=CD$.

Ora, sendo $AB=CD$ e $AB \parallel CD$, o quadrilátero ABCD é um \square . (§112, corolário)

Chama-se *centro de um paralelogramo* o ponto de intersecção de suas diagonais. O ponto M (fig. 60) é o centro do \square ABCD. A denominação de *centro do \square* , dada ao ponto M, provém do seguinte fato: traçando-se pelo ponto M, um segmento qualquer PQ, limitado pelos lados do mesmo \square , o ponto M divide este segmento em dois segmentos iguais.

Deixamos aos estudantes, como exercício, o prazer de provarem que $MP = MQ$.

Observação. Ficou demonstrado que os lados e os \angle opostos de um \square são iguais; que as diagonais se dividem mutuamente em partes iguais; que qualquer segmento retilíneo PQ, que passe pelo centro M do \square , fica dividido em duas partes iguais: $MP=MQ$. Ora, estas propriedades todas do \square podem ser verificadas concretamente, procedendo-se do seguinte modo. Sobre o \square ABCD (fig. 60) coloca-se uma folha de papel transparente que se imobiliza com um alfinete cravado no

ponto M. Decalca-se (copia-se) toda a figura. Em seguida faz-se a copia girar em torno do ponto M, que fica imóvel, até que o ponto C coincida com o ponto A. E então o estudante verá que:

- I. $AB = CD$ e $AD = BC$
- II. $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$
- III. $MA = MC$ e $MB = MD$
- IV. $MP = MQ$

Observação. Esta verificação é necessária, tem de ser feita, se o estudante quiser entender o parágrafo seguinte. Convém observar que, durante o movimento de rotação do segmento MC, se o ponto M permanece imóvel, se o segmento MC é invariável, então o ponto C coincidirá com o ponto A, depois de descrever a metade de uma circunferência, isto é, um arco de 180° . Dar-se-á o mesmo com os pontos A, B e D. Dizemos, em Geometria que a figura executou uma rotação de 180° .

Exercícios em classe

1. Construir um \square ABCD (fig. 60) sendo $AC=8\text{cm}$ e $BD=6\text{cm}$. Quantas soluções? Por que?
2. Exercício análogo ao anterior, sendo $\hat{A}MB=50^\circ$.
3. Construir um \square ABCD (fig. 60) sendo $AB=7\text{cm}$, $BC=5\text{cm}$ e $AC=10\text{cm}$.
4. Construir um \square ABCD (fig. 60) sendo $AB=8\text{cm}$, $AC=11\text{cm}$, e com 5cm de altura.

114. **Simetria em relação a um ponto.** No \square ABCD (fig. 60) vimos que o ponto M é o centro dos segmentos AC, BD e PQ, e de qualquer segmento retilíneo passando por M e tendo suas extremidades situadas nos dois lados opostos do mesmo \square . Os pontos A e C são chamados *simétricos* em relação ao ponto M, assim como os pontos B e D, P e Q, etc..

Dois pontos P e P' são *simétricos em relação a um ponto* dado M, quando o ponto M é o meio ou o centro do segmento PP'. O ponto M recebe o nome de *centro de simetria*. No \square , o ponto de intersecção das diagonais é um centro de simetria porque, em relação a este ponto, qualquer ponto situado no perímetro do \square tem sempre um ponto simétrico, no mesmo perímetro. O centro de uma \bigcirc é também um centro de simetria porque, em relação a este centro, qualquer ponto situado na \bigcirc tem sempre um ponto simétrico na mesma \bigcirc ; traçando-se um diâ-

metro CD em uma \bigcirc qualquer, as suas extremidades, isto é, os pontos C e D, são dois pontos simétricos em relação ao ponto O porque este ponto é o centro do segmento CD.

Consideremos os \triangle ABC e $\triangle A'B'C'$ (fig. 61) e suponhamos que os pontos A e A' são simétricos em relação ao ponto M, assim como os pontos B e B' e os pontos C e C'. Portanto,

- H. $\left\{ \begin{array}{l} AA' \text{ é um segmento retilíneo;} \\ MA = MA'. \\ BB' \text{ é um segmento retilíneo;} \\ MB = MB'. \\ CC' \text{ é um segmento retilíneo;} \\ MC = MC'. \end{array} \right.$

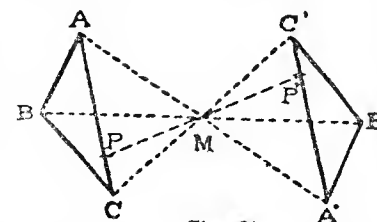


Fig. 61

Seja P um ponto qualquer situado no lado AC do \triangle ABC. Vamos demonstrar que existe no lado A'C' do \triangle A'B'C', um ponto P' que é o simétrico do ponto P, em relação ao ponto M. Tracemos os segmentos retilíneos AC' e CA'. No quadrilátero ACA'C' as diagonais AA' e CC' se dividem mutuamente em partes iguais. (hip.) Logo, este quadrilátero é um \square . (§112, recíproca) Ora, se traçarmos o segmento PMP', teremos $MP=MP'$. (§113) Portanto, os pontos P e P' são simétricos em relação ao ponto M, isto é, sendo P um ponto qualquer situado no \triangle ABC, existe sempre no \triangle A'B'C' um ponto P' simétrico do ponto P, em relação ao ponto M, e os \triangle ABC e $\triangle A'B'C'$ são simétricos em relação ao ponto M.

Observação. $AC=A'C'$ como lados opostos do \square ACA'C'; $AB=A'B'$ como lados opostos do \square ABA'B'; $BC=B'C'$ como lados opostos do \square BCB'C'. Donde $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. (3.º caso)

Duas figuras geométricas são *simétricas em relação a um ponto* dado M (fig. 61) quando, em relação a este ponto M, um ponto qualquer P, situado na primeira figura, tem um ponto simétrico P', situado na segunda.

Do exposto se conclue que, para construir a figura simétrica de AC, em relação a um ponto dado M, é bastante construir os pontos simétricos de A e C; logo, a figura simétrica de um segmento retilíneo AC, em relação a um ponto dado M, é também um segmento retilíneo A'C'. Para construir a figura si-

métrica de um \triangle qualquer ABC, em relação a um ponto dado M, é bastante construir os pontos simétricos de A, B e C; logo a figura simétrica de um \triangle é outro \triangle ; de um \angle é outro \angle ; de um \square é outro \square , etc..

115. Igualdade e simetria. Os \triangle ABC e A'B'C' (fig. 61) serão iguais? *Duas figuras geométricas são iguais quando é possível, colocando uma sobre a outra, fazer com que todos os pontos de uma coincidam com todos os pontos da outra e reciprocamente.* (§ 163)

Sendo os dois \triangle ABC e A'B'C' (fig. 61) simétricos em relação ao ponto M do plano em que eles estão situados, a sua coincidência se faz de um modo muito simples. Imprime-se ao \triangle A'B'C' um movimento de rotação em torno do ponto M, centro de simetria dos dois \triangle ; quando o segmento MA' coincidir com o segmento MA, o que é possível, porque $MA' = MA$, a figura MA'B'C' terá realizado uma rotação de 180° (§ 113, observação) e coincidirá com a figura MABC. (Por hip., temos também $MB' = MB$ e $MC' = MC$.) E assim o \triangle A'B'C' coincide com o \triangle ABC; logo, estes dois \triangle são iguais.

A igualdade de duas figuras planas e simétricas em relação a um ponto M situado no mesmo plano em que elas se acham, é sempre *direta* porque, como acabámos de ver, é sempre possível fazer com que elas coincidam, sem que nenhuma delas abandone o plano comum. Esta igualdade é ainda *direta* porque as duas figuras iguais são do *mesmo sentido*. (§ 163)

116. Simetria em relação a uma reta. *Dois pontos são simétricos em relação a uma reta dada, quando esta é a mediatriz do segmento retilíneo que liga os dois pontos dados.* Os pontos A e A' são simétricos em relação à reta MN (fig. 62) porque esta reta é a mediatriz do segmento AA'. A reta MN recebe o nome de *eixo de simetria*. Dado um ponto qualquer A, situado fora de uma reta MN, se quisermos construir o ponto A' simétrico de A em relação à MN, é bastante traçar $AP \perp MN$, prolongar AP e tomar um segmento $PA' = AP$. O ponto A' será o ponto simétrico de A em relação à MN.

Consideremos os \triangle ABC e A'B'C' (fig. 62) e suponhamos que os pontos A e A' são simétricos em relação à reta MN, assim como os pontos B e B' e os pontos C e C'. Portanto,

$$H. \begin{cases} AA' \perp MN; PA = PA' \\ BB' \perp MN; RB = RB' \\ CC' \perp MN; QC = QC' \end{cases}$$

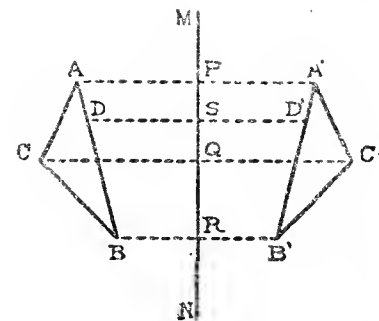


Fig. 62

Seja D um ponto qualquer situado no lado AB do \triangle ABC. Vamos demonstrar que existe no lado A'B' do \triangle A'B'C', um ponto D' simétrico do ponto D em relação à reta MN. Tracemos o segmento retilíneo $DS \perp MN$ e prolonguemos este segmento até encontrar A'B' no ponto D'. A reta MN divide o plano onde estão situados os dois \triangle , em dois semiplanos. Façamos o semiplano direito girar em torno de MN, até coincidir com o esquerdo. Os \angle MPA', MQC' e MRB' sendo retos (hip.) os segmentos PA', QC' e RB' coincidem, respectivamente, em direção, com os segmentos PA, QC e RB; mas, sendo $PA' = PA$, $QC' = QC$ e $RB' = RB$ (hip.) os pontos A', B' e C' coincidem com os pontos A, B e C. Logo, o \triangle A'B'C' coincide com o \triangle ABC e o lado A'B' coincide com o lado AB. Donde resulta que o ponto D' deve coincidir com um ponto qualquer do lado AB.

Mas $M\hat{S}D = M\hat{S}D'$ (construção); logo, o segmento SD' coincide, em direção com o segmento SD e o ponto D' deve coincidir com um ponto qualquer de SD ou do seu prolongamento. Nestas condições, se o ponto D' deve coincidir com um ponto qualquer de AB e um ponto qualquer de SD, então coincide com o ponto D. Segue-se que $SD = SD'$; e sendo $MN \perp DD'$, os pontos D e D' são simétricos em relação à reta MN.

Observação. Ficou provado ao mesmo tempo que $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, sendo $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$.

Duas figuras geométricas são simétricas em relação a uma reta dada MN (fig. 62) quando, em relação a esta reta MN, um ponto qualquer D, situado na primeira figura tem um ponto simétrico D', situado na segunda.

Portanto, para construir a figura simétrica de um segmento AB, em relação a uma reta dada MN, é bastante construir os pontos simétricos de A e B; logo, a figura simétrica de um segmento retilíneo AB, em relação a uma reta dada MN, é também um segmento retilíneo A'B'. Para construir a figura simétrica de um \triangle qualquer ABC, em relação a uma reta dada MN, é bastante construir os pontos simétricos de A, B e C. Logo, a figura simétrica de um \triangle é outro \triangle ; de um \angle é outro \angle ; de um quadrilátero é outro quadrilátero, etc..

Assim, fazendo o semiplano direito girar em torno de MN, até coincidir com o semiplano esquerdo, duas figuras planas, sendo simétricas em relação a este eixo, coincidirão e serão, portanto, iguais. Entretanto, a igualdade entre estas duas figuras é *inversa*. Com efeito, elas são de *sentidos opostos* (§ 163) e é impossível fazê-las coincidir sem o rebatimento de um semiplano sobre o outro.

117. O retângulo. Em um \square ABCD (fig. 60) dois \angle opostos são iguais e dois \angle consecutivos, isto é, adjacentes a um mesmo lado, como, por exemplo, os \angle A e B, são supls. Em geral, os quatro \angle são agudos e obtusos; A e C sendo agudos, B e D são obtusos.

TEOREMA. Se um ângulo de um paralelogramo é reto, os outros três ângulos também são retos.

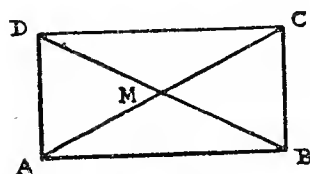


Fig. 63

$$H: \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \\ \hat{A} = 1 \text{ reto} \end{cases}$$

T. { Os \angle B, C e D são retos.

A figura ABCD (fig. 63) é um \square .

(hip.) Logo $\hat{A} = \hat{C}$. Mas o \angle A é reto, donde o \angle C também é reto. Os \angle A e D são supls. porque são col.-int. formados pelas \parallel AB e CD, cortadas pela transversal AD. Mas o \angle A é reto; então o \angle D, sendo suplemento do \angle A, também é reto. Finalmente, sendo $\hat{D} = \hat{B}$, e o \angle D sendo reto, o \angle B também é reto.

O \square cujos quatro \angle são retos é chamado *retângulo*.

Retângulo é um paralelogramo cujos quatro ângulos são retos.

Se o retângulo é um \square possui, então, todas as suas propriedades; seus lados opostos são iguais, seus \angle opostos são iguais, dois \angle consecutivos são supls., suas diagonais se dividem mutuamente em partes iguais.

Mas o retângulo tem uma propriedade que o \square não tem.

TEOREMA. As diagonais de um retângulo são iguais.

H. { ABCD é um retângulo. T. { AC = BD

Comparemos os \triangle ABC e ABD. (fig. 63)

$$AB = AB$$

$$BC = AD \quad (\text{lados opostos de um } \square)$$

$$\hat{A} = \hat{B} \quad (\text{ABCD é um retângulo, portanto } \hat{A} = \hat{B})$$

$$\triangle ABC = \triangle ABD \quad (2.^\circ \text{ caso de igualdade de } \triangle)$$

$$AC = BD$$

RECÍPROCA. Se as diagonais de um paralelogramo são iguais, este paralelogramo é um retângulo.

H. { ABCD é um \square . T. { ABCD é um retângulo.

Comparemos os \triangle ABC e ABD. (fig. 63)

$$AB = AB$$

$$BC = AD \quad (\text{lados opostos de um } \square)$$

$$AC = BD \quad (\text{hip.})$$

$$\triangle ABC = \triangle ABD \quad (3.^\circ \text{ caso de igualdade de } \triangle)$$

$$\hat{A} = \hat{B}$$

Mas estes dois \angle são supls. porque são col.-int., formados pelas \parallel AD e BC, cortadas pela transversal AB; sendo iguais e supls., são retos. Logo, a figura ABCD é um retângulo.

Base de um retângulo é qualquer um de seus lados. Altura de um retângulo é o segmento \perp à base, traçado por qualquer ponto da base oposta. Em um retângulo ABCD, tomando como base o lado AB (fig. 63) a altura será AD ou BC, porque estes segmentos são \perp AB. Tomando como base AD, a altura será AB ou CD, pela mesma razão.

Chamam-se *dimensões* de um retângulo, os comprimentos de dois lados consecutivos. Medindo os lados AB e AD do retângulo ABCD (fig. 63) obteremos as dimensões do mesmo retângulo.

O ponto de intersecção das diagonais de um retângulo, isto é, o ponto M (fig. 63) é um centro de simetria.

Exercícios em classe

1. Provar que dois retângulos são iguais quando têm dois lados consecutivos iguais, cada um a cada um.
2. Dados um retângulo ABCD e um ponto qualquer M situado fora do retângulo, construir o retângulo simétrico em relação ao ponto M.
3. Dados um retângulo ABCD e uma reta qualquer MN que não o atravessa, construir o retângulo simétrico em relação à reta MN.
4. Construir um retângulo sendo AB=7cm e AD=5cm.
5. Construir um retângulo tendo para diagonal AC=7cm. Quantas soluções? Por que? Conclusão?
6. Construir um retângulo tendo para diagonal AC=7cm e sendo o \angle das diagonais igual a 64° .
7. Construir um retângulo ABCD (fig. 63) sendo AB=5cm e AC=7cm.

118. O losango. Os lados opostos de um \square são \parallel dois a dois e iguais dois a dois. Às vezes, os quatro lados de um \square são iguais. (fig. 64). Damos a este \square o nome de *losango*.

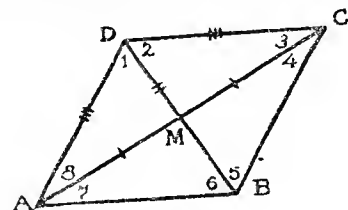


Fig. 64

Losango é um paralelogramo cujos quatro lados são iguais.

Se o losango é um \square , possui, então, todas as suas propriedades; seus lados e \angle opostos são iguais, dois \angle consecutivos são supls., suas diagonais se dividem mutuamente em partes iguais. Mas o losango tem propriedades que o \square não tem.

TEOREMA. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e são bissetrizes dos ângulos do losango.

$$H. \begin{cases} ABCD \text{ é um } \square. \\ AD = DC \end{cases} \quad T. \begin{cases} AC \perp BD \\ \hat{1} = \hat{2}, \quad \hat{3} = \hat{4} \\ \hat{5} = \hat{6}, \quad \hat{7} = \hat{8} \end{cases}$$

Comparemos os \triangle AMD e CMD.

$$\begin{aligned} AM &= MC & (\S 116) \\ DM &= DM \end{aligned}$$

$$AD = DC \quad (\text{hip.})$$

$$\triangle AMD = \triangle CMD \quad (3.^\circ \text{ caso de igualdade de } \triangle)$$

Os dois \triangle sendo iguais, a lados iguais se opõem \angle iguais.

Portanto, $\hat{A}MD = \hat{C}MD$. Ora, se a diagonal DB encontra a diagonal AC formando com esta dois \angle adjacentes iguais, DB é \perp à AC (§83), ou $AC \perp$ à BD.

Se os \triangle AMD e CMD são iguais, então $\hat{1} = \hat{2}$ donde se conclue que BD é a bissetriz do \angle D. De modo análogo se provará que $\hat{3} = \hat{4}$, $\hat{5} = \hat{6}$ e $\hat{7} = \hat{8}$.

PRIMEIRA RECÍPROCA. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si, este paralelogramo é um losango.

$$H. \begin{cases} ABCD \text{ é um } \square. \\ AC \perp BD \end{cases} \quad T. \begin{cases} AB = BC \end{cases}$$

Comparemos os \triangle AMB e CMB (fig. 64).

$$AM = CM \quad (\S 116)$$

$$BM = BM$$

$$\hat{A}MB = \hat{C}MB \quad (\text{hip.})$$

$$\triangle AMB = \triangle CMB \quad (2.^\circ \text{ caso de igualdade de } \triangle)$$

Portanto, $AB = BC$, e o \square ABCD é um losango.

SEGUNDA RECÍPROCA. Se uma diagonal de um paralelogramo é bissetriz de dois ângulos opostos do paralelogramo, este paralelogramo é um losango.

$$H. \begin{cases} ABCD \text{ é um } \square. \\ \hat{1} = \hat{2}, \quad \hat{5} = \hat{6} \end{cases} \quad T. \begin{cases} AB = AD \end{cases}$$

Se o quadrilátero ABCD (fig. 64) é um \square , então $\hat{B} = \hat{D}$

$$(\S 115) \quad \therefore \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{D}}{2}. \text{ Mas } \frac{\hat{B}}{2} = \hat{6} \text{ e } \frac{\hat{D}}{2} = \hat{1} \text{ (hip.) } \therefore \hat{1} = \hat{6}. \text{ Sendo } \hat{1} = \hat{6} \text{ segue-se que, no } \triangle ABD, AB = AD. (\S 97, \text{ recíproca})$$

A base e a altura de um losango se definem como a base e a altura de um \square .

Exercícios em classe

1. Provar que dois losangos são iguais quando têm um lado igual e um \angle também igual.
2. Provar que o ponto de intersecção das diagonais de um losango é um centro de simetria.

3. Provar que a diagonal de um losango é um eixo de simetria.
4. Dados um losango ABCD e um ponto qualquer M situado fora do losango, construir o losango simétrico em relação ao ponto M.
5. Dados um losango ABCD e uma reta qualquer MN situada fora do losango, construir o losango simétrico em relação à reta MN.
6. Construir um losango ABCD (fig. 64) sendo $AB=6\text{cm}$ e $\hat{A}=63^\circ$.
7. Construir um losango ABCD (fig. 64) sendo $AC=8\text{cm}$ e $BD=5\text{cm}$.
8. Construir um losango ABCD (fig. 64) sendo $AC=8\text{cm}$ e $AD=7\text{cm}$.
9. Dado um losango ABCD (fig. 64) tomar como base o lado BC e traçar duas alturas, uma pelo ponto B e outra pelo ponto C; provar que as duas alturas são iguais.

119. O quadrado. Consideremos o \square ABCD (fig. 65) e suponhamos que os quatro lados são iguais e os quatro \angle são retos. Portanto este \square é, ao mesmo tempo, um retângulo e um losango, e tem o nome particular de *quadrado*.

Observação. Embora o quadrado seja, de fato, um losango, reserva-se o nome de *losango* ao quadrilátero que tem os quatro lados iguais, sem ter os quatro ângulos iguais.

O quadrado reúne todas as propriedades do retângulo e do losango, a saber:

- I. Os quatro \angle são retos.
- II. Os quatro lados são iguais.
- III. As diagonais são iguais.
- IV. As diagonais são \perp entre si.
- V. As diagonais são bissetrizes dos \angle do quadrado.

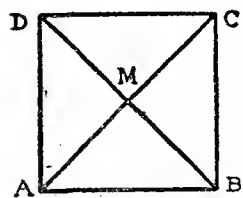


Fig. 65

Quadrado é o quadrilátero cujos quatro lados são iguais e cujos quatro ângulos são retos.

A base de um quadrado é qualquer um de seus lados, por exemplo AB. (fig. 65) Então a altura será um dos lados consecutivos, isto é, AD ou BC. (§ 112) Sendo ABCD um quadrado, a base é igual à altura, isto é, as *dimensões* de um quadrado são iguais.

O quadrado é a *unidade de área* universalmente adotada. Como unidade de área toma-se um quadrado cujo lado seja a unidade de comprimento. Assim, o *metro quadrado* é o quadrado cujo lado tem um metro de comprimento.

É fácil demonstrar de um modo concreto que, se o lado do quadrado ABCD mede, por exemplo, 15cm, este quadrado contém 15×15 ou 15^2 centímetros quadrados. Portanto, para calcular a área de um quadrado, é bastante medir o comprimento de um de seus lados e multiplicar o número obtido por si mesmo, isto é, *calcular a segunda potência do número obtido*. Eis por que as expressões 7^2 , 15^2 , a^2 , são chamadas, em Matemática, *quadrado de 7, quadrado de 15, quadrado de a*, etc..

Exercícios em classe

1. Provar que dois quadrados são iguais, quando têm um lado igual.
2. Provar que o ponto de intersecção das diagonais de um quadrado é um centro de simetria; provar que a diagonal é um eixo de simetria.
3. Dão-se um quadrado ABCD e um ponto qualquer M situado fora do quadrado; construir o quadrado simétrico em relação ao ponto M.
4. Dão-se um quadrado ABCD e uma reta qualquer MN situada fora do quadrado; construir o quadrado simétrico em relação à reta MN.
5. Construir um quadrado cujo lado meça 6cm.
6. Construir um quadrado cuja diagonal meça 8cm.
7. Dado um quadrado ABCD (fig. 65) traçam-se as diagonais; provar que os quatro \triangle são retângulos, são isósceles e são iguais.

120. O trapézio. Já foi definido. (*)

A base de um trapézio não é qualquer um de seus lados, como acontece com o \square , o retângulo, o losango e o quadrado; a base de um trapézio é um de seus lados \parallel . Um trapézio qualquer ABCD (fig. 66) tem duas bases porque tem somente dois lados \parallel ; estas duas bases não podem ser iguais porque, sendo \parallel , se fossem iguais, a figura ABCD seria um \square . (§ 112, corolário) Para distinguir as bases de um trapézio é bastante dizer *base maior* e *base menor*. No trapézio ABCD, AB é a base maior e CD é a base menor.

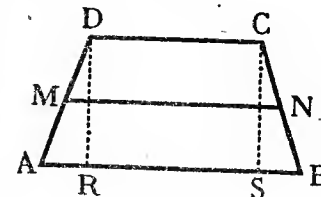


Fig. 66

Altura de um trapézio é o segmento retilíneo \perp às duas bases e por elas limitado. No trapézio ABCD o segmento DR ou CS, \perp às bases, é a altura do trapézio. No trapézio retângulo um lado sendo \perp às bases pode representar a altura do trapézio.

(*) E.M.P.V. § 38.

Mediana de um trapézio é o segmento retilíneo que liga os meios dos lados não \parallel . No trapézio ABCD, se $MA=MD$ e $NB=NC$, então MN é a mediana do trapézio. Dá-se também à mediana de um trapézio o nome de *base média*. Adiante veremos por que.

TEOREMA. *Em um trapézio isósceles, os ângulos adjacentes a cada uma das bases são iguais.*

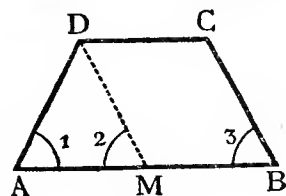


Fig. 67

$$\begin{aligned} H. \{ & \text{ABCD é um trapézio.} \\ & \text{AB} \parallel \text{CD}; \text{AD} = \text{BC} \\ T. \{ & \hat{A} = \hat{B}; \hat{C} = \hat{D} \end{aligned}$$

Pelo vértice D tracemos $DM \parallel BC$. Sendo $AB \parallel CD$ (hip.) e $DM \parallel BC$ (construção) o quadrilátero MBCD é um \square $\therefore DM = BC$. Porém, $AD = BC$ (hip.). Logo, $DM = AD$. Nestas condições,

o $\triangle DAM$ é isósceles $\therefore \hat{1} = \hat{2}$. Ora;

$\hat{2} = \hat{3}$ (correspondentes formados pelas \parallel MD e BC, cortadas etc..)

$\hat{2} = \hat{1}$ (como foi demonstrado).

Logo, $\hat{1} = \hat{3}$ ou $\hat{A} = \hat{B}$.

Deixamos aos estudantes o prazer de provarem que $\hat{C} = \hat{D}$.

121. As mediatrizes de um triângulo. (*) Se traçarmos um \triangle e as suas mediatrizes, com todo o rigor possível, verificaremos que elas se encontram, concorrem em um mesmo ponto. Somos então levados a afirmar que as três mediatrizes de um \triangle concorrem em um mesmo ponto. Entretanto, a demonstração desta propriedade das mediatrizes, feita pelo desenho, não satisfaz à razão; o encontro das três mediatrizes pode ser atribuído a uma forma particular do \triangle ; a nossa acuidade visual não permite também afirmar que as três mediatrizes se encontrem, realmente, em um mesmo ponto. Daí a necessidade de demonstrar esta propriedade das mediatrizes, de uma maneira independente da forma do \triangle , e sem recorrer ao desenho.

(*) Assim designaremos, abreviadamente, as mediatrizes dos lados de um \triangle .

TEOREMA. *As mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.* (fig. 68)

Seja o $\triangle ABC$. Tracemos as mediatrizes MM' e NN' . Estas duas mediatrizes se encontram sempre. Com efeito, os $\angle BDP$ e BEP são retos por construção; ligando o ponto D ao ponto E, a soma dos $\angle PDE$ e PED será inferior a dois retos. Ora, quando duas retas MM' e NN' são cortadas por uma transversal DE, estas duas retas se encontram sempre, do lado em que a soma dos dois \angle col.-int. é inferior a dois retos. (axioma n.º 11 de Euclides) Portanto, as mediatrizes MM' e NN' se encontram sempre em um ponto P.

Ora, o ponto P está situado na mediatriz do segmento AB; portanto $PA=PB$. (§90) O ponto P está situado na mediatriz do segmento BC; portanto, $PC=PB$.

Sendo $PA=PB$ e $PC=PB$, então $PA=PC$. Ora, se o ponto P dista igualmente dos pontos A e C, conclue-se que o ponto P está na mediatriz do segmento AC (§90), isto é, a mediatriz do segmento AC também passa pelo ponto P.

122. As alturas de um triângulo. TEOREMA. *As alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.*

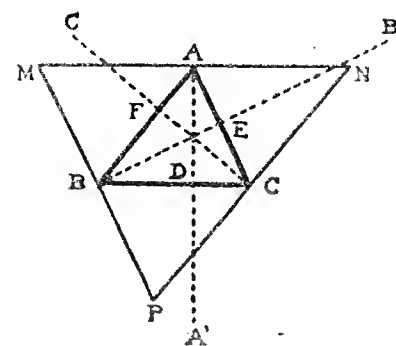


Fig. 69

Seja o $\triangle ABC$. Pelos três vértices tracemos \parallel aos lados opostos.

Formaremos assim o $\triangle MNP$. Vamos provar que o ponto A é o meio do lado MN. Com efeito, sendo $MN \parallel BC$, $MP \parallel AC$ e $NP \parallel AB$ (construção) os quadriláteros AMBC e ANCB são \square . (§112) Portanto, $AM=BC$ e $AN=BC$ $\therefore AM=AN$. Sendo $AM=AN$, então o vértice A é o meio do lado MN. De modo análogo pro-

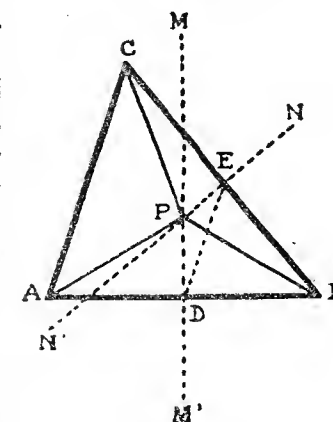


Fig. 68

varemos que os vértices B e C são, respectivamente, os meios dos lados MP e NP do $\triangle MNP$.

Isto pôsto, tracemos a mediatriz AA' do segmento MN. Sendo $MN \parallel BC$ (construção) e sendo $AA' \perp$ a MN (§90). segue-se que $AA' \perp$ a BC. (§102, 3.º corolário do postulado de Euclides) Então o segmento AD da mediatriz AA' é altura do $\triangle ABC$ em relação ao lado BC. De modo análogo provaremos que o segmento BE da mediatriz BB' é altura do $\triangle ABC$ em relação ao lado AC, e que o segmento CF da mediatriz CC' é altura do $\triangle ABC$ em relação ao lado AB.

Mas já ficou demonstrado que as mediatrizes de um \triangle concorrem em um mesmo ponto. (§ 121) Logo, as alturas do $\triangle ABC$, que são as mediatrizes do $\triangle MNP$, também concorrem em um mesmo ponto.

123. As bissetrizes de um triângulo. TEOREMA. As bissetrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.

Seja o $\triangle ABC$. (fig. 70) Tracemos as bissetrizes BE e CF dos $\angle B$ e C. Estas duas bissetrizes se encontram sempre. Com efeito, $\hat{B} + \hat{C} < 2 \text{ retos}$. (§ 109) Com mais razão $\hat{a} + \hat{b} < 2 \text{ retos}$.

Ora, quando duas retas BE e CF são cortadas por uma transversal BC, estas duas retas se encontram sempre do lado em que a soma dos dois \angle col.-int. é inferior a dois retos. (axioma n.º 11 de Euclides) Portanto, as bissetrizes BE e CF se encontram sempre em um ponto P.

Ora, se o ponto P está situado na bissetriz do $\angle B$, o ponto P dista igualmente dos lados dêste \angle , isto é, $PD = PD''$. (§ 99) Se o ponto P está situado na bissetriz do $\angle C$, o ponto P dista igualmente dos lados dêste \angle , isto é, $PD' = PD''$.

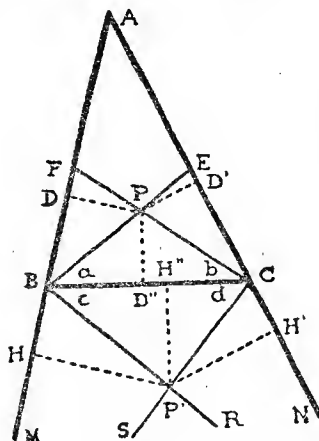


Fig. 70

Observação. Convém lembrar que as distâncias do ponto P aos três lados do $\triangle ABC$ são os segmentos PD, PD' e PD'', respectivamente, e aos três lados do mesmo \triangle . (§ 89, 1.º teorema, observação)

Ora, sendo $PD = PD''$ e $PD' = PD''$, então, $PD = PD'$, isto é, o ponto P dista igualmente dos lados do $\angle A$. Nestas condições, o ponto P está situado na bissetriz do $\angle A$, isto é, a bissetriz do $\angle A$, passa também pelo ponto P. (§ 102, recíproca)

TEOREMA. As bissetrizes de dois ângulos externos de um triângulo, e a bissetriz do ângulo interno não adjacente, concorrem em um mesmo ponto.

Seja o $\triangle ABC$ (fig. 70), prolonguemos os lados AB e AC, e tracemos as bissetrizes dos \angle externos MBC e NCB. Cada um destes \angle sendo inferior a dois retos, cada uma das suas metades, isto é, o $\angle c$ ou o $\angle d$ é inferior a um reto. Portanto, $\hat{c} + \hat{d} < 2 \text{ retos}$. Então, as bissetrizes BR e CS se encontram sempre em um ponto P'.

Estando o ponto P' na bissetriz do $\angle MBC$, dista igualmente dos lados dêste \angle , isto é, $P'H = P'H''$. Estando o ponto P' na bissetriz do $\angle NCB$, dista igualmente dos lados deste \angle , isto é, $P'H' = P'H''$. De $P'H = P'H''$ e $P'H' = P'H''$ deduzimos $P'H = P'H'$, isto é, o ponto P' dista igualmente de BM e CN ou AM e AN. Então o ponto P' está na bissetriz do $\angle A$, isto é, a bissetriz do $\angle A$, passa também pelo ponto P'.

Observação. As três bissetrizes de um \triangle concorrem em um mesmo ponto P. (fig. 70) Vimos que o ponto P é equidistante dos três lados do $\triangle ABC$, isto é, os segmentos PD, PD' e PD'', e respectivamente aos lados AB, AC e BC do $\triangle ABC$, são iguais. As bissetrizes de dois \angle externos, e a bissetriz do \angle interno não adjacente também concorrem em um mesmo ponto P'; este ponto é equidistante do lado BC e dos prolongamentos BM e CN, dos lados AB e AC, isto é, os segmentos P'H, P'H' e P'H'', respectivamente, e aos lados BM, CN e BC, são iguais. Veremos mais tarde, a utilidade destas observações.

124. O segmento retilíneo que liga os meios de dois lados de um triângulo. Este segmento tem duas propriedades importantes.

TEOREMA. O segmento retilíneo que liga os meios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

$$H. \begin{cases} MA = MC \\ NB = NC \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \frac{AB}{2} \end{cases}$$

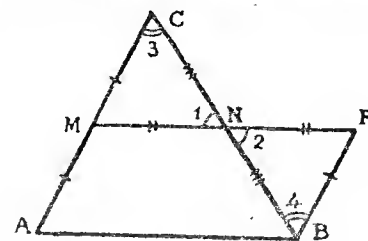


Fig. 71

Pelo ponto B tracemos $BR \parallel AC$ e prolonguemos MN até encontrar BR no ponto R . Em seguida, comparemos os $\triangle MNC$ e BRN .

$$NB = NC \text{ (hip.)}$$

$$\hat{1} = \hat{2} \text{ (o. p. v.)}$$

$$\hat{3} = \hat{4} \text{ (alt.-int. formados pelas } \parallel AC \text{ e } BR, \text{ etc.)}$$

$$\triangle MNC = \triangle BRN \text{ (1.º caso de igualdade dos } \triangle) \therefore$$

$$MC = BR$$

$$\text{Mas } MC = MA \text{ (hip.)} \therefore MA = BR$$

Ora, no quadrilátero $ABRM$, $MA = BR$ e $MA \parallel BR$; logo, este quadrilátero é um \square (§112, corolário) $\therefore MR$ ou $MN \parallel AB$. Demonstrada a primeira parte da tese, passemos à segunda.

No $\square ABRM$, $MR = AB$ (§112, teorema) Mas $MN = NR$
 $\therefore MR = 2MN$ ou $AB = 2MN \therefore \frac{AB}{2} = MN$ ou $MN = \frac{AB}{2}$

RECÍPROCA. Se, pelo meio de um dos lados de um triângulo, traçarmos uma paralela ao segundo lado, esta paralela dividirá o terceiro lado em duas partes iguais, e será igual à metade do segundo lado.

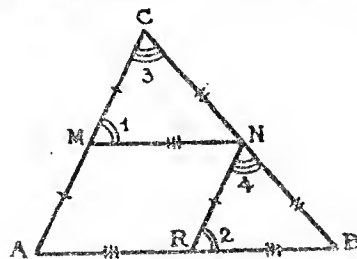


Fig. 72

$$\begin{aligned} \text{H. } & \begin{cases} MA = MC \\ MN \parallel AB \end{cases} \\ \text{T. } & \begin{cases} NC = NB \\ MN = \frac{AB}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Pelo ponto N tracemos $NR \parallel AC$. Sendo $MN \parallel AR$ (hip.) e $NR \parallel AC$ (construção), a figura $MNRA$ é um \square . Então $MA = RN$. Mas $MA = MC$

(hip.) $\therefore MC = RN$. Comparemos os $\triangle MCN$ e RNB .

$$MC = RN \text{ (como foi demonstrado)}$$

$$\hat{1} = \hat{2} \text{ (lados } \parallel \text{ e dirigidos no mesmo sentido)}$$

$$\hat{3} = \hat{4} \text{ (correspondentes formados pelas } \parallel CM \text{ e } NR, \text{ etc.)}$$

$$\triangle MCN = \triangle RNB \text{ (1.º caso de igualdade dos } \triangle) \therefore$$

$$NC = NB$$

Demonstrada a primeira parte da tese, passemos à segunda.

No $\square MNRA$, $MN = AR$. (§112, teorema) Devido à igualdade dos $\triangle MCN$ e RNB , temos $MN = RB$. Logo,

$$\begin{cases} MN = AR \\ MN = RB \end{cases} \therefore 2MN = AB \therefore MN = \frac{AB}{2}$$

125. As medianas de um triângulo. TEOREMA. As medianas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, e este ponto divide cada mediana em dois segmentos tais que o menor é a metade do maior.

Seja o $\triangle ABC$ e tracemos duas medianas quaisquer AD e BE . Estas duas medianas se encontram sempre em um ponto O . (axioma n.º 11 de Euclides) E desde que AD e BE são medianas, então $EA = EC$ e $DB = DC$.

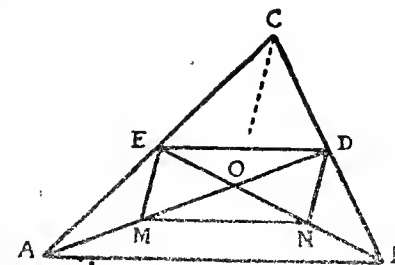


Fig. 73

Isto pôsto, seja M o meio de AO , e N o meio de BO . Tracemos os segmentos ED e MN .

No $\triangle ABC$, sendo $EA = EC$ e $DB = DC$

$$ED \parallel AB \text{ e } ED = \frac{AB}{2} \quad (\S 124)$$

No $\triangle AOB$, sendo $MA = MO$ e $NB = NO$

$$MN \parallel AB \text{ e } MN = \frac{AB}{2} \quad (\S 124)$$

Sendo $ED \parallel AB$ e $MN \parallel AB$, teremos $ED \parallel MN$. (§102, 1.º corolário do postulado de Euclides)

$$\text{Sendo } ED = \frac{AB}{2} \text{ e } MN = \frac{AB}{2}, \text{ teremos } ED = MN.$$

(Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.)

Logo, o quadrilátero $MNDE$, no qual os lados opostos ED e MN são iguais e \parallel , é um \square . (§112, corolário) E lembrando que as diagonais de um \square se dividem em partes iguais, (§114)...

$$MO = OD \text{ e } NO = OE$$

$$\text{Mas, } MO = MA \text{ e } NO = NB \text{ (construção)}$$

$$\text{Logo, } MA = MO = OD \text{ e } NB = NO = OE.$$

Fica assim demonstrado que as medianas AD e BE se encontram em um ponto O, ficando divididas por este ponto em dois segmentos tais que o menor é a metade do maior, isto é,

$$OD = \frac{OA}{2} \quad OE = \frac{OB}{2}$$

Ora, é evidente que, se repetirmos a demonstração com as medianas que partem dos vértices A e C, chegaremos às mesmas conclusões; a terceira mediana, a que parte do vértice C, passará também pelo ponto O; porque, se não passasse por este ponto, se passasse por um outro ponto O' da mediana AD, teríamos dois segmentos diferentes, OD e O'D, cada um deles igual à terça parte de AD, o que é absurdo.

126. A mediana de um trapézio. Mediana de um trapézio é o segmento retilíneo que liga os meios dos lados não ||.

TEOREMA. O segmento retilíneo que liga os meios dos lados não paralelos de um trapézio, é paralelo às bases.

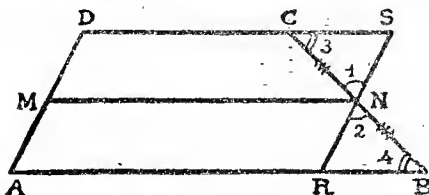


Fig. 74

Observação. Bastará provar que $MN \parallel AB$. Com efeito, sendo $CD \parallel AB$ e se provarmos que $MN \parallel AB$, teremos $MN \parallel CD$, pelo primeiro corolário do postulado de Euclides.

Consideremos o trapézio ABCD (fig. 74) e pelo ponto N, centro de BC, tracemos $RS \parallel AD$. Em seguida, prolonguemos DC até encontrar RS no ponto S. O quadrilátero ARSD, seus lados opostos sendo ||, (hip. e construção) é um \square , donde $AD = RS$.

Comparemos os $\triangle NRB$ e NCS .

$$NC = NB \text{ (hip.)}$$

$$\hat{1} = \hat{2} \text{ (o. p. v.)}$$

$$\hat{3} = \hat{4} \text{ (alt.-int. formados pelas } \parallel AB \text{ e } DC, \text{ etc.)}$$

$$\triangle NRB = \triangle NCS \text{ (1.º caso da igualdade dos } \triangle \text{) } \therefore$$

$$H. \begin{cases} AB \parallel CD \\ MA = MD \\ NB = NC \end{cases}$$

$$T. \{ MN \parallel AB$$

$$NS = NR = \frac{RS}{2} \quad \text{Já vimos que } AD = RS \therefore \frac{AD}{2} = \frac{RS}{2} \dots$$

$$MA = NR \text{ e } MD = NS$$

Conclue-se então que o quadrilátero MNRA, no qual MA e NR são iguais e ||, é um \square ; logo, $MN \parallel AR$ ou $MN \parallel AB$.

RECÍPROCA. Traçando-se, pelo meio de um dos lados não paralelos de um trapézio, uma paralela a uma das bases, esta paralela divide o outro lado não paralelo em duas partes iguais.

$$H. \begin{cases} AB \parallel CD \\ MN \parallel AB \\ MA = MD \end{cases} \quad T. \{ NB = NC$$

Em primeiro lugar observemos que, sendo $MN \parallel AB$ e $CD \parallel AB$, resulta $MN \parallel CD$. (§ 102)

No $\triangle ABD$, sendo..... $MA = MD$ e $ME \parallel AB$ (hip.) segue-se que $EB = ED$. (§ 124, recíproca) No $\triangle BCD$, sendo $EB = ED$ e $EN \parallel CD$, então $NB = NC$.

PRIMEIRO COROLÁRIO. A mediana de um trapézio é igual à metade da soma das bases do mesmo trapézio.

$$\text{No } \triangle ABD \text{ (fig. 75)... } ME = \frac{AB}{2} \text{ (§ 124, teorema)}$$

$$\text{No } \triangle BCD \text{ (fig. 75)... } NE = \frac{CD}{2} \text{ (§ 124, teorema)}$$

Somando as duas igualdades...

$$ME + NE = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} \therefore MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Portanto, a mediana de um trapézio é a média aritmética das bases do trapézio. Eis por que esta linha tem, em Geometria, o nome de base média do trapézio. (§ 122)

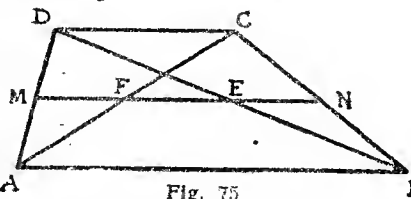


Fig. 75

SEGUNDO COROLÁRIO. *As diagonais de um trapézio interceptam na mediana ou base média, um segmento igual à semidiferença das bases.*

Observação. O ponto de intersecção das diagonais de um trapézio não pode coincidir com um ponto da base média; com efeito, se tal sucedesse, a diferença das bases seria nula, as bases seriam iguais, e o trapézio seria, na realidade, um paralelogramo.

$$\text{No } \triangle ABD \text{ (fig. 75) } \dots \quad ME = \frac{AB}{2} \quad (\S 124, \text{ teorema})$$

$$\text{No } \triangle ACD \text{ (fig. 75) } \dots \quad MF = \frac{CD}{2} \quad (\S 124, \text{ teorema})$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira.....

$$ME - MF = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} \quad \dots \quad EF = \frac{AB - CD}{2}$$

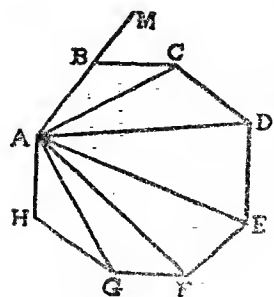


Fig. 76

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLVII.

127. Ângulos e diagonais de um polígono. O polígono já foi definido. (§ 92) É necessário não confundir o polígono com a linha quebrada ou poligonal. (§ 96)

O polígono é uma linha quebrada ou poligonal, mas fechada. Portanto, um polígono tem, pelo menos, três lados.

Os polígonos têm nomes particulares, de acordo com o número de seus lados.

Os principais são os seguintes: o triângulo, com três lados; o quadrilátero, com quatro lados; o pentágono, com cinco lados; o hexágono, com seis lados; o octógono, com oito lados; o decágono, com dez lados; o dodecágono, com doze lados; etc..

Um polígono pode ser côncavo ou convexo, plano ou reverso. (§ 110) Mas o Δ é sempre convexo e plano. Nestas lições elementares consideraremos somente polígonos convexos e planos.

Polígono regular é o polígono cujos lados e ângulos são iguais. Portanto, para provar que um polígono é regular, será necessário provar que :

a) Seus lados são iguais.

b) Seus ângulos são iguais.

O Δ equilátero é um polígono regular. (§ 94, corolário) O quadrado também. (§ 119) No Δ , a igualdade dos lados acarreta a dos \angle s, e reciprocamente. Mas este fato só se verifica com o Δ ; o losango tem os quatro lados iguais e não é um polígono regular; o retângulo tem os quatro \angle s iguais e não é um polígono regular.

128. As diagonais de um polígono. Suponhamos que um polígono qualquer P (fig. 76) tem n lados; então terá também n vértices. Quantas diagonais podemos traçar pelo vértice A? Evidentemente, o vértice A não pode ser unido consigo mesmo. Também não pode ser unido com os vértices consecutivos B e H, porque os segmentos AB e AH são *lados* do polígono; não são *diagonais*. Mas o vértice A pode ser unido com os demais vértices do polígono, e os segmentos resultantes são diagonais. Donde se conclue que, dado um polígono qualquer P, com n lados, o número de diagonais que podemos traçar pelo vértice A é igual a $n - 3$.

TEOREMA. *Para determinar o número de diagonais de um polígono de n lados, multiplica-se n por $n - 3$ e divide-se o produto por 2.*

Seja o polígono qualquer ABCDEFGHA (fig. 76) e admitamos que ele tem n lados. Pelo vértice A podemos traçar $n - 3$ diagonais; partindo de cada um dos vértices B, C, D... etc., podemos traçar $n - 3$ diagonais. Ora, se o polígono tem n vértices e, partindo de cada um deles, podemos traçar $n - 3$ diagonais, o número total de diagonais é $n(n - 3)$. (?) É o que parece, mas não é verdade, porque cada diagonal foi contada duas vezes. Por exemplo, a diagonal AE foi contada duas vezes: a primeira, quando contamos as diagonais traçadas pelo vértice A, e a segunda, quando contamos as diagonais traçadas pelo vértice E. Então o número de diagonais distintas no polígono de n lados, é a metade do producto $n(n - 3)$.

Representando por d o número de diagonais de um polígono qualquer com n lados, teremos:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \quad [\text{Formula A}]$$

Aplicando esta fórmula ao Δ , teremos $d = \frac{3(3-3)}{2} = \text{zero}$.

Com efeito, o Δ não tem diagonais. Aplicando-a a um quadrilátero qualquer, teremos $d = \frac{4(4-3)}{2} = 2$; o quadrilátero tem duas diagonais. Aplicando-a a um polígono de 23 lados, teremos $d = \frac{23(23-3)}{2} = \frac{23 \times 20}{2} = 230$; o polígono de 23 lados tem 230 diagonais.

Problema. Sendo dado o número de diagonais de um polígono, isto é, d , determinar o número de lados, isto é, n .

Tirando da fórmula A, o valor de n , teremos sucessivamente:

$$\begin{array}{lcl} 2d = n(n-3) & ; & 2d - n^2 + 3n = 0 \\ 2d = n^2 - 3n & ; & n^2 - 3n - 2d = 0 \end{array}$$

E não podemos prosseguir; chegámos a uma equação do segundo grau, que ainda não sabemos resolver, a não ser em certos casos particulares. (§75)

129. A soma dos ângulos de um polígono. A soma dos \angle de um Δ é igual a dois retos (§109); a soma dos \angle de um quadrilátero é igual a quatro retos. (§111)

TEOREMA. Se um polígono tem n lados, a soma de seus ângulos é igual a $2(n-2)$ ângulos retos isto é, tantas vezes dois retos, quantos são os lados menos dois.

Consideremos um polígono ABCDEFGA (fig. 76), com n lados. Por um vertice qualquer, A, tracemos as $n-3$ diagonais. (§ 128) Ora, se observarmos atentamente a figura, verificaremos que o polígono fica decomposto em Δ ABC, ACD, ADE, AEF, AFG e AGH, cujas bases são BC, CD, DE, EF, FG e GH. Donde se conclue que, num polígono qualquer P com n lados, se traçarmos por um de seus vértices, A, todas as diagonais possíveis, o polígono ficará decomposto em tantos Δ quantos são os lados menos dois, isto é, ficará decomposto em $n-2$ Δ .

A soma dos \angle de um Δ é igual a dois retos. Se o polígono P está decomposto em $n-2$ Δ , a soma dos \angle dos $n-2$ Δ é igual a $2(n-2)$ retos. Mas a figura nos mostra com evi-

dência que os \angle dos Δ , somados convenientemente, são os \angle do polígono. Logo,

Soma \angle internos de um polígono $= 2(n-2)$ retos.

Ou, representando por S a soma dos \angle internos...

$$S = 2(n-2) \text{ retos}$$

130. O ângulo de um polígono regular. Em um polígono regular (§127) todos os \angle são iguais. Ao polígono cujos \angle são iguais dá-se o nome de *polígono equiângulo*. Um polígono regular é equiângulo, mas a recíproca nem sempre é verdadeira; o retângulo é um polígono equiângulo, mas não é regular.

Seja um polígono regular P com n lados. A soma de seus \angle internos é $2(n-2)$ retos. Se o polígono tem n \angle , e se estes \angle são iguais, segue-se que a amplitude do \angle de um polígono regular com n lados é

$$\frac{2(n-2) \text{ retos}}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{180(n-2) \text{ graus}}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{200(n-2) \text{ grados}}{n}$$

Exercícios em classe

Organizar um quadro com os valores dos \angle dos polígonos regulares de 3 a 12 lados.

Observação. O \angle de um polígono regular depende do número de lados do mesmo polígono. Da observação das fórmulas que nos dão o valor deste ângulo, concluímos que:

1.º) À medida que o número de lados de um polígono regular aumenta, o valor do \angle do mesmo polígono também aumenta.

2.º) O \angle de um polígono regular não pode ser um \angle qualquer. Por exemplo, não existe um polígono regular cujo \angle tenha 75° , 100° , 115° , 125° , etc..

131. A soma dos ângulos externos de um polígono. Consideremos um polígono qualquer ABCDEA (fig. 77) e prolonguemos todos os seus lados no mesmo sentido, isto é, percorrendo, por exemplo, o contorno, na ordem alfabética. Formaremos assim os \angle externos do mesmo polígono. Suponhamos que o polígono, dado

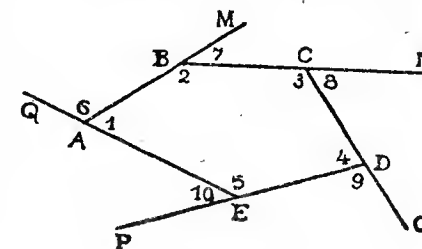


Fig. 77

tem n lados; então terá n vértices, e os \angle externos que traçamos serão também em número de n .

TEOREMA. *A soma dos ângulos externos de um polígono, quando seus lados são prolongados no mesmo sentido, é igual a quatro ângulos retos.*

Em cada vértice do polígono dado (fig. 77) há dois \angle , um interno e outro externo, adjacentes e supls..

Por exemplo, $\hat{1} + \hat{6} = 2$ retos, $\hat{2} + \hat{7} = 2$ retos, etc.. Se o polígono tem n vértices; se em cada vértice há dois \angle , um interno e outro externo, cuja soma é igual a 2 retos, teremos:

$$\text{soma } \angle \text{ int.} + \text{soma } \angle \text{ ext.} = 2n \text{ retos}$$

Ou, representando por S' , a soma dos \angle externos.....

$$S + S' = 2n \text{ retos} \quad (1)$$

Ora, nesta igualdade, o primeiro termo do primeiro membro é igual a $2(n-2)$ retos. Substituindo em (1) teremos:

$$\begin{aligned} 2(n-2) \text{ retos} + S' &= 2n \text{ retos} \\ 2n \text{ retos} - 4 \text{ retos} + S' &= 2n \text{ retos} \\ S' &= 2n \text{ retos} - 2n \text{ retos} + 4 \text{ retos} \\ S' &= 4 \text{ retos.} \end{aligned}$$

Observação. Em um polígono regular de n lados, um \angle externo é igual a $\frac{4 \text{ retos}}{n}$.

132. Igualdade de polígonos. Consideremos os polígonos ABCDEA e A'B'C'D'E'A'. (fig. 78) Para que sejam iguais é evidente, em primeiro lugar, que devem ter o mesmo número de lados. Satisfeita esta condição, se nos afirmarmos que seus lados e \angle são iguais, dois a dois, exceto dois lados (CD e C'D', DE e D'E') e o \angle por eles formado (\hat{D} e \hat{D}'), a respeito dos quais nada se sabe, poderemos afirmar que os dois polígonos são iguais, isto é, sendo superpostos, todos os seus elementos coincidem dois a dois, inclusive CD e C'D', DE e D'E', \hat{D} e \hat{D}' . E' o que significa o seguinte

TEOREMA. *Dois polígonos com o mesmo número de lados são iguais quando seus lados e ângulos, dispostos na mesma ordem, são iguais, excetuando dois lados consecutivos e o ângulo por eles formado.*

$$H. \begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ AE = A'E' \\ \hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}', \quad \hat{E} = \hat{E}' \end{cases}$$

T. { Os dois polígonos são iguais.

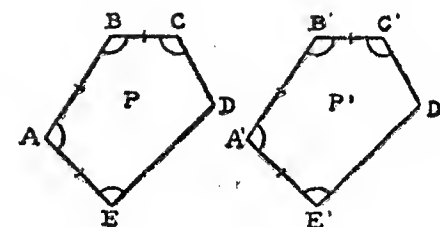


Fig. 78

Façamos o polígono P' deslizar no plano da figura, até que $A'B'$ coincida com AB , o que é possível. (hip.) Sendo $\hat{B} = \hat{B}'$, o lado $B'C'$ coincide, em direção, com o lado BC , e por ser $B'C' = BC$, o vértice C' coincide com o vértice C . Sendo $\hat{C} = \hat{C}'$, o lado $C'D'$ coincide, em direção, com o lado CD , e o vértice C' coincide com um ponto qualquer do lado CD ou do seu prolongamento.

Sendo $\hat{A} = \hat{A}'$, o lado $A'E'$ coincide, em direção, com o lado AE , e por ser $A'E' = AE$, o vértice E' coincide com o vértice E . Sendo $\hat{E} = \hat{E}'$, o lado $E'D'$ coincide, em direção, com o lado ED , e o vértice D' coincide com um ponto qualquer do lado ED ou do seu prolongamento.

Se o vértice D' deve coincidir ao mesmo tempo com um ponto qualquer dos lados CD e DE , então coincide com o vértice D , que é o único ponto comum a estes dois lados. Nestas condições, os dois polígonos *coincidem* em toda a sua extensão e são, por consequência, *iguais*.

Observação. Nesta demonstração, admitimos que os dois polígonos são do mesmo sentido. (§ 163) Se forem de sentidos opostos, já sabemos como proceder.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLVIII.

O Círculo

133. A **circunferência** é um lugar geométrico. Já aprendemos (E.M.P.V. § 27) o que é *circunferência*, *círculo*, *centro*, *raio*, *diâmetro*, *arco* e *corda*.

A \bigcirc , sendo uma linha plana e fechada, divide o plano em que está situada, em duas regiões distintas: *uma região interior*, que contém o centro da \bigcirc e todos os pontos do círculo; *uma região exterior*, que não contém pontos do círculo.

Os pontos da \bigcirc estão situados simultaneamente nas duas regiões. Seja R o raio de uma \bigcirc .

As posições relativas de um ponto e de uma \bigcirc são três.

1.^a O ponto B (fig. 79) está situado na região exterior da \bigcirc . Neste caso, teremos com evidência:

$$OB > R$$

E o ponto B é chamado *ponto exterior*.

2.^a O ponto A está situado na \bigcirc . Neste caso, teremos:

$$OA = R$$

3.^a O ponto C está situado na região interior da \bigcirc . Neste último caso, teremos com evidência:

$$OC < R$$

E o ponto C é chamado *ponto interior*.

Em resumo, representando por M um ponto situado no plano de uma \bigcirc , por R o raio da mesma \bigcirc e por d a distância do ponto M ao centro da \bigcirc , fica estabelecido que:

- 1.^o Sendo M um ponto exterior, $d > R$.
- 2.^o Sendo M um ponto interior, $d < R$.
- 3.^o Estando o ponto M na \bigcirc , $d = R$.

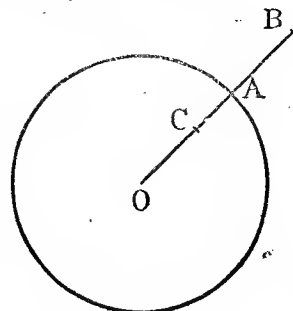


Fig. 79

Imaginemos uma \bigcirc traçada em um terreno plano, e com um raio de 50 metros. Um indivíduo situado a 46 metros do centro desta \bigcirc está no *interior* dela; um indivíduo situado a 54 metros do centro está no *exterior* dela.

Problema. E' dado um segmento retilíneo AB (fig. 80) com 10cm. Determinar, no plano em que se acha este segmento, um ponto situado a 8cm do ponto A e a 6cm do ponto B .

Solução. Fazendo centro no ponto A e com um raio de 8cm, traça-se uma \bigcirc . Se o ponto pedido existe, *ele deve estar situado nesta \bigcirc* . Com efeito, não pode ser *exterior* em relação a esta \bigcirc , porque então sua distância ao ponto A seria maior que 8cm; também não pode ser *interior* porque então sua distância ao ponto A seria menor que 8cm; logo, o ponto pedido deve estar na \bigcirc .

.. Fazendo centro no ponto B e com um raio de 6cm, traça-se outra \bigcirc . Se o ponto pedido existe, *ele deve estar situado também nesta segunda \bigcirc* , como é fácil de provar.

Ora, as duas \bigcirc se cortam nos pontos C e C' . Estando o ponto C situado a 8cm do ponto A e a 6cm do ponto B , é *ele* uma solução do problema. E visto que o ponto C' preenche também as condições impostas pelo problema, segue-se que este tem duas soluções.

Observação. Os estudantes deverão verificar que este problema pode ter duas soluções, uma ou nenhuma; determinarão também quais as condições necessárias para que as soluções sejam duas, uma ou nenhuma.

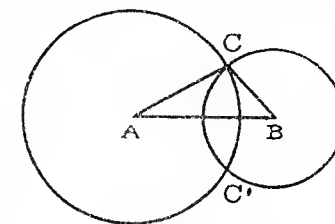


Fig. 80

Deste problema resulta que a \bigcirc é também um *lugar geométrico*. Com efeito, se o ponto pedido deve estar situado a 8cm do ponto A , nós não hesitamos; imediatamente fazemos centro no ponto A , com um raio AC , de 8cm, traçamos uma \bigcirc . E' *somente nesta \bigcirc que existem pontos situados a 8cm do ponto A* ; fora dela, ou no interior dela, *não existem pontos situados a 8cm do ponto A* . Todos os pontos desta \bigcirc , de centro A e raio AC , gozam, pois, de uma determinada propriedade, propriedade esta que não pertence, absolutamente, aos pontos situados no interior ou no exterior da mesma \bigcirc .

Portanto, a \bigcirc é um *lugar geométrico*. (§ 91)

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos situados a uma distância dada de um ponto dado.

O lugar geométrico dos pontos situados a uma distância dada, de um ponto dado, é uma circunferência cujo centro é o ponto dado e cujo raio é a distância dada.

Exercícios em classe

1. Uma reta AB e um ponto C situado fora desta reta determinam um plano. Determinar neste plano um ponto P situado a 5cm da reta AB e do ponto C.

2. Três pontos dados A, B e C, não situados em linha reta, determinam um plano. Determinar neste plano um ponto P equidistante dos pontos A e B, e situado a 5cm do ponto C.

3. Dado um \angle MON e dois pontos quaisquer A e B situados no plano do \angle , determinar um ponto P equidistante dos lados do \angle , assim como dos pontos A e B.

4. Traçar um \angle qualquer MON. Tomar no lado OM um segmento OA com 7cm. Determinar no plano do \angle , um ponto P equidistante dos lados do \angle e situado a 4cm do ponto A.

134. A divisão da circunferência. Os geómetras antigos dividiram a \bigcirc em 360 partes iguais chamadas *graus*.

O grau se divide em 60 partes iguais chamadas *minutos*, e o minuto se divide em 60 partes iguais chamadas *segundos*. Se um arco AB tem 75 graus, 48 minutos e 24 segundos, escreveremos abreviadamente $75^\circ 48' 24''$.

Modernamente a \bigcirc é também dividida em 400 partes iguais chamadas *grados*. (*) Os submúltiplos do grado são o decigrado, o centigrado e o miligrado.

A vantagem da divisão centesimal da \bigcirc sobre a divisão sexagesimal é manifesta. Na divisão centesimal temos de operar com frações decimais, ao passo que na divisão sexagesimal temos de operar com números complexos.

(*) Convém ler E. M. S. V. § 27.

135. A secante e a tangente. Uma reta não pode cortar uma \bigcirc em mais de dois pontos. Suponhamos que a reta AB (fig. 81) corta a \bigcirc de raio OA em três pontos distintos, A, B e C. Se estes três pontos estão situados na \bigcirc , os segmentos OA, OB e OC são iguais como raios de uma mesma \bigcirc . Ora, $OA = OB = OC$, não é possível. (§ 89)

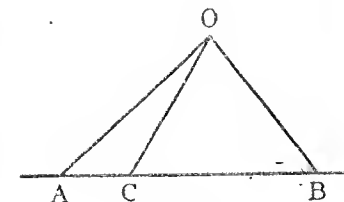


Fig. 81

Logo, uma reta não pode cortar uma \bigcirc em mais de dois pontos.

Dadas uma \bigcirc e uma reta situadas de uma maneira qualquer num plano, estas duas linhas podem ter dois pontos comuns, um ou nenhum. Consideremos a \bigcirc de raio OM e a reta

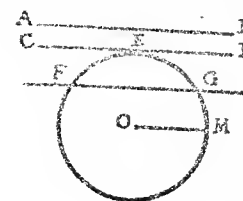


Fig. 82

FG. (fig. 82) Estas duas linhas têm dois pontos comuns, os pontos F e G; diz-se então que a reta FG é uma *secante* e os pontos F e G são chamados *pontos de intersecção* da secante com a \bigcirc ; os pontos do segmento FG são *interiores* e os pontos situados nos dois prolongamentos do segmento FG são *exteriores* em relação à \bigcirc . Consideremos a mesma \bigcirc

de raio OM e a reta CD. Estas duas linhas têm um ponto comum, o ponto E; a reta CD é chamada *tangente* (do latim *tangere*, tocar) e o ponto E é chamado *ponto de contacto* da tangente com a \bigcirc ; os demais pontos da reta CD são exteriores em relação à \bigcirc . Finalmente, a reta AB, que não tem ponto comum com a \bigcirc , é chamada *exterior*.

Uma reta é exterior a uma \bigcirc quando não tem nenhum ponto comum com a \bigcirc .

Uma reta é tangente a uma \bigcirc quando tem um ponto comum com a \bigcirc ; este ponto comum é chamado *ponto de contacto*.

Uma reta é secante a uma \bigcirc quando tem dois pontos comuns com a \bigcirc ; estes dois pontos comuns são chamados *pontos de intersecção*.

A \bigcirc é uma curva convexa porque, em relação a qualquer das suas tangentes, ela fica sempre do mesmo lado da tangente.

Consideremos a \bigcirc de centro N, cortada pela secante RST. (fig. 83) Façamos esta girar no plano da figura, em torno do

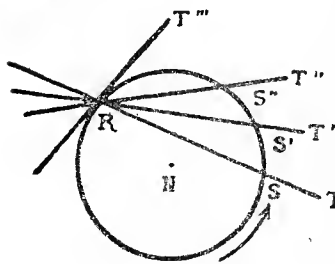


Fig. A3

Fig. 83

• Tangente a uma \odot é a posição final de uma secante que gira em torno de um dos pontos de intersecção, até que o segundo coincida com o primeiro.

136. Arcos e cordas. PRIMEIRO TEOREMA. *Um diâmetro qualquer divide a circunferência em duas partes iguais.*

Na \bigcirc de centro O e raio OM , tracemos um diâmetro qualquer AB . Este diâmetro, suficientemente prolongado nos dois sentidos, divide o plano onde se acha a \bigcirc , em dois semiplanos: o superior e o inferior. Tomemos um ponto qualquer M , situado na \bigcirc e no semiplano superior, façamos este semiplano girar em torno de AB , até coincidir com o semiplano inferior, e suponhamos que o ponto M coincide com o ponto M' , situado no interior da \bigcirc . Então o segmento OM toma a posição OM' e teremos $OM = OM'$, o que não pode ser porque, sendo M' um ponto interior, devemos ter $OM' < OM$.

Fig. 84

Suponhamos que o ponto M coincide com o ponto M'', situado no exterior da O. Então, o segmento OM toma a posição OM'' e teremos $OM = OM''$, o que não pode ser porque, sendo M'' um ponto exterior, devemos ter $OM'' > OM$.

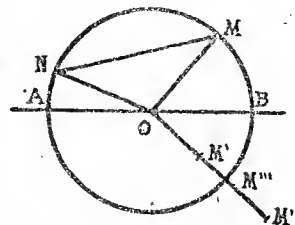


Fig. 84

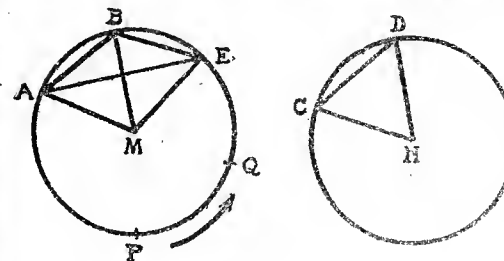


Fig. 85

Se o ponto P coincidir com o ponto B, teremos arco PQ = arco AB.
Se o ponto P coincidir com um ponto situado entre os pontos A e B, teremos arco PQ < arco AB.

Segue-se que o ponto M , não podendo coincidir com um ponto do semiplano inferior, que esteja situado no interior ou no exterior da O , deve coincidir com um ponto situado na O , por exemplo, com o ponto M''' .

Ora, se um ponto qualquer M, situado no arco superior AB, deve coincidir com um ponto M''' situado no arco inferior AB, estes dois arcos coincidem em toda a sua extensão e são, por consequência, iguais. Cada um destes arcos é, pois, uma metade da \odot . Torna-se também evidente que a porção de círculo limitada pelo diâmetro AB e pelo arco AMB coincide com a porção de círculo limitada pelo diâmetro AB e pelo arco AM'''B; então cada uma destas porções é uma metade do círculo.

SEGUNDO TEOREMA. *A maior corda que se pode traçar em uma circunferência é um diâmetro.*

Consideremos o diâmetro AB, uma corda qualquer MN, (fig. 84) e tracemos os raios OM e ON.

H.	{	AB é um diâmetro e MN é uma corda qualquer.	Com efeito,	MN < ON + OM (por que?) . . .
				MN < OA + OB (por que?) . . .
T.	{	MN < AB		MN < AB (por que?)
				C. Q. D.

TERCEIRO TEOREMA. *Em uma circunferência ou em duas circunferências com raios iguais, arcos iguais são subtendidos por cordas iguais.*

Observação. Dois arcos AB e PQ são iguais quando é possível fazê-los coincidir. Copiemos em papel transparente a \odot de raio MA, coloquemos a cópia sobre o original de modo que os centros das duas \odot coincidam, imobilizemos os dois centros com um alfinete, e façamos a cópia girar sobre o original, no sentido indicado pela seta, até que o ponto Q coincida com o ponto A.

Se o ponto P coincidir com o ponto B, teremos arco PQ = arco AB.
Se o ponto P coincidir com um ponto situado entre os pontos A e B, teremos arco PQ < arco AB.

Se o ponto P coincidir com um ponto situada aquém do ponto B, teremos arco PQ > arco AB.

E' evidente que dois arcos não poderão coincidir, se seus raios não forem iguais.

$$H. \begin{cases} MA = NC \\ \text{arco AB} = \text{arco CD} \end{cases} \quad T. \begin{cases} \text{corda AB} = \text{corda CD} \end{cases}$$

Façamos a O de raio NC deslizar no plano da figura até que NC coincida com MA o que é possível porque NC=MA. (hip.) Os raios sendo iguais, as duas @ também coincidem. Sendo arco CD=arco AB (hip.) e coincidindo o ponto C com o ponto A, então o ponto D coincide com o ponto B. Nestas condições, a corda CD coincide com a corda AB, isto é, as cordas AB e CD são iguais.

TEOREMA CONTRÁRIO. *Em uma circunferência ou em duas circunferências com raios iguais, arcos desiguais são subtendidos por cordas desiguais, e ao arco maior corresponde a corda maior.*

$$H. \begin{cases} MA = NC \\ \text{arco AE} > \text{arco CD} \end{cases} \quad T. \begin{cases} \text{corda AE} > \text{corda CD} \end{cases}$$

Façamos a O de raio NC (fig. 85) deslizar no plano da figura até que NC coincida com MA, o que é possível porque NC=MA. (hip.) Os raios sendo iguais, as duas @ também coincidem. Sendo arco AE > arco CD, e coincidindo o ponto C com o ponto A, o ponto D não pode coincidir com o ponto E; coincidirá com um ponto B, situado no arco AE, entre os pontos A e E. Tracemos os raios MB e ME; estando o ponto B entre os pontos A e E, o raio MB ficará situado necessariamente no interior do $\angle AME$. Isto pôsto, comparemos os $\triangle AMB$ e $\triangle AME$.

$$\begin{array}{l|l} MA = MA & \\ MB = ME & \text{Então } AB < AE. (\S 97) \text{ Porém, } AB = CD. \\ \angle AMB < \angle AME & \text{Logo, } CD < AE \text{ ou } AE > CD \end{array}$$

Exercícios. Enunciar as recíprocas dos dois últimos teoremas e demonstrá-las diretamente e pela redução ao absurdo.

Observação. Razão de dois números é o quociente da divisão destes dois números. A razão dos números a e b é $a \div b$ ou $a : b$ ou a/b . Se os números a e b são as medidas de dois segmentos, a expressão a/b significa quantas vezes o segmento a contém o segmento b .

A RAZÃO DE DOIS ARCOS DESIGUAIS NÃO É IGUAL À RAZÃO DE SUAS CORDAS. Sejam os arcos AB e BE (fig. 85) e admitamos que estes dois arcos são iguais; logo $\frac{\text{arco AB}}{\text{arco AE}} = \frac{1}{2}$. Calculemos agora a razão das cordas AB e AE que subtendem os arcos AB e AE, isto é, a razão $\frac{AB}{AE}$. Se os arcos AB e BE são iguais, suas cordas AB e BE também são iguais. Isto pôsto, no $\triangle ABE$ temos $AB + BE > AE \therefore 2AB > AE \therefore \frac{AB}{AE} > \frac{1}{2}$. Portanto se a razão dos arcos AB e AE é igual a $\frac{1}{2}$, a razão de suas cordas é maior que $\frac{1}{2}$.

QUARTO TEOREMA. *Um diâmetro perpendicular a uma corda divide em duas partes iguais esta corda e os dois arcos que ela subtende.*

$$H. \begin{cases} AB \text{ é um diâmetro } \perp \text{ à corda CD.} \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} MC = MD \\ \text{arco AC} = \text{arco AD} \\ \text{arco BC} = \text{arco BD} \end{cases}$$

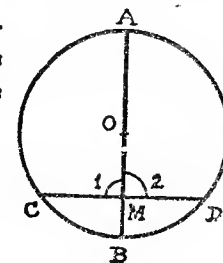


Fig. 86

O diâmetro AB divide o plano da figura em dois semiplanos. Façamos o semiplano direito girar em torno de AB, até coincidir com o semiplano esquerdo. Sendo $\hat{1} = \hat{2}$ (hip.) o segmento MD coincide, em direção com o segmento MC, e o ponto D coincide com um ponto qualquer situado no segmento MC, ou no seu prolongamento. Mas o ponto D, estando situado na semicircunferência ADB, coincide também com um ponto qualquer situado na semicircunferência ACB. (§136, 1.º teorema) Logo, o ponto D coincide com o ponto C que é o único ponto comum às linhas MC e ACB. Donde resulta que MD=MC.

Os pontos A e B permanecendo imóveis, o arco AD coincide com o arco AC e o arco BD coincide com o arco BC. Então arco AD = arco AC e arco BD = arco BC.

Exercício. Demonstrar este teorema sem fazer o semiplano direito girar em torno de AB.

RECÍPROCA. *A perpendicular traçada pelo meio de uma corda passa pelo centro da circunferência.*

Seja CD (fig. 86) uma corda da O de centro O e raio OC. Pelo ponto M, meio de CD, tracemos uma $\perp MO'$ e admitamos que esta \perp não passe pelo centro da O. Ora, pelo teorema direto,

se pelo centro da \bigcirc traçarmos uma \perp à corda CD, esta \perp passará pelo ponto M, meio da corda CD. Teremos então duas \perp MO e MO' a uma mesma reta CD, traçadas por um mesmo ponto M, o que é absurdo. (§ 83) Logo...

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIX.

137. A distância de uma corda ao centro. TEOREMA. Duas cordas iguais distam igualmente do centro.

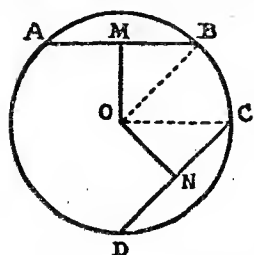


Fig. 87

$$H. \{ AB = CD \quad T. \{ OM = ON$$

Consideremos as cordas iguais AB e CD. Tracemos os segmentos OM e ON, respectivamente \perp às cordas AB e CD. Os segmentos OM e ON serão então as distâncias do centro da \bigcirc às cordas AB e CD. (§ 89 1.º teorema, observação) Tracemos os raios OB e OC, e comparemos os \triangle OMB e ONC.

$$\begin{array}{lcl} AB = CD \text{ (hip.)} & \therefore & \text{Se os } \triangle \text{ OMB e ONC} \\ \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} & \therefore & \text{são retângulos e têm a hipotenusa igual (OB=OC) e um} \\ MB = NC \text{ (§ 139, 3.º teorema)} & & \text{cateto igual (MB=NC) então} \\ OB = OC & & \text{estes dois } \triangle \text{ são iguais.} \\ \hat{OMB} = \hat{ONC} = 1 \text{ reto} & & \text{ (§ 98, 1.º caso) Donde } OM = ON. \end{array}$$

TEOREMA CONTRÁRIO. Duas cordas desiguais distam desigualmente do centro e a corda menor é a que está mais afastada do centro.

Consideremos as cordas AB e CD, sendo $AB > CD$. (fig. 88) Tracemos os segmentos OM e ON, respectivamente \perp às cordas AB e CD. Os segmentos OM e ON serão então as distâncias do centro da \bigcirc às cordas AB e CD. Sendo $AB > CD$, segue-se que arco AB > arco CD. Fazamos o arco CD deslizar sobre a \bigcirc e no sentido indicado pela seta, até que o ponto

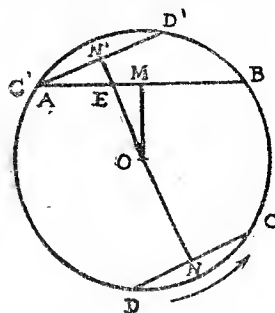


Fig. 88

C coincida com o ponto A. Sendo arco AB > arco CD, o ponto D coincidirá com um ponto da \bigcirc situado necessariamente entre os pontos A e B, e o arco CD tomará a posição C'D'. Tracemos a corda C'D' e o segmento ON' \perp C'D'. Desde que arco C'D' = arco CD, então C'D' = CD (§ 136, 3.º teorema) e ON = ON'. (§ 137, 1.º teorema)

Ora, $OM < OE$ (OM sendo \perp AB, OE é oblíqua)

Mas, $OE < ON'$

Logo, $OM < ON' \therefore OM < ON$

Exercício. Enunciar as recíprocas destes dois teoremas e demonstrá-las pela redução ao absurdo.

138. Traçar uma circunferência que passe por três pontos dados. TEOREMA. Por três pontos dados e não situados em linha reta é sempre possível traçar uma circunferência, e somente uma.

Sejam A, B e C os três pontos dados e não situados em linha reta. Tracemos as mediatrizes dos segmentos AB e BC. Estas duas mediatrizes se encontram sempre. (axioma n.º 11 de Euclides) Seja O, o ponto de interseção; então o ponto O dista igualmente dos pontos A, B e C. (§ 121) Logo, fazendo centro no ponto O, e traçando uma \bigcirc cujo raio seja OA, esta \bigcirc passará necessariamente pelos pontos B e C. Portanto, por três pontos dados e não situados em linha reta, é sempre possível traçar uma \bigcirc .

Suponhamos que existe uma segunda \bigcirc que passe pelos pontos A, B e C; o centro desta \bigcirc será também o ponto O e o raio será OA; nestas condições ela coincidirá com a primeira.

Observações. Se os três pontos dados A, B e C estiverem em linha reta, as mediatrizes MM' e NN', sendo \perp a uma mesma reta ABC, serão \parallel (§ 102) e encontrar-se-ão no infinito. Donde resulta que a reta é uma \bigcirc cujo centro está situado no infinito. Esta definição da reta como limite da \bigcirc nos permite compreender por que a superfície da Terra, sendo curva, nós temos a ilusão de que é plana.

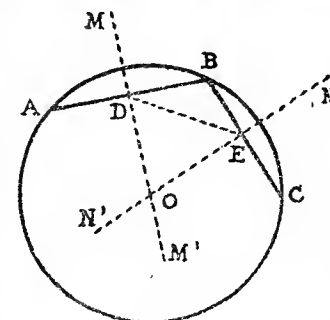


Fig. 89

Para determinar o centro de uma \odot ou de um arco, tomam-se três pontos quaisquer A, B e C (fig. 89); nesta \odot ou arco, traçam-se as cordas AB e BC, e as mediatrizes destas cordas; as duas mediatrizes se encontram em um ponto que é o centro procurado.

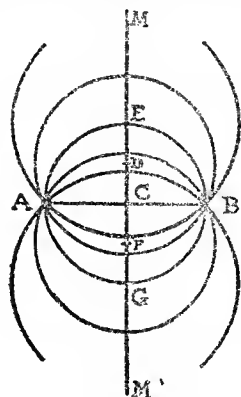


Fig. 90

O lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por dois pontos dados é a mediatriz do segmento retilíneo que liga os dois pontos dados.

Em resumo, por três pontos dados é sempre possível traçar uma \odot , e somente uma. Por dois pontos dados podemos fazer passar uma infinidade de \odot : uma delas, e somente uma, passará pelo terceiro ponto dado fora do segmento que une os dois primeiros.

139. As propriedades da tangente. TEOREMA. *Uma reta perpendicular a um raio e traçada pela extremidade d'êste mesmo raio, é tangente à circunferência.*

H. $\{ AB \perp OA.$

T. $\{ AB \text{ é tangente à } \odot.$

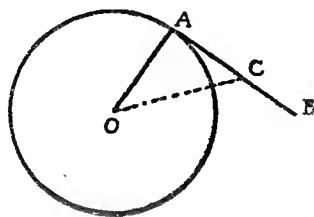


Fig. 91

Problema. Traçar uma \odot que passe por dois pontos dados.

Sejam A e B (fig. 90) os dois pontos dados. Tracemos a mediatriz MM' do segmento AB. Qualquer ponto de MM' dista igualmente dos pontos A e B. (§90) Portanto, tomando como centro qualquer dos pontos C, D, E, F, ... e como raios correspondentes os segmentos CA, DA, EA, FA, ..., todas as \odot traçadas passarão pelos pontos A e B. Donde se conclue que há uma infinidade de \odot que passam por dois pontos dados. E não havendo fora da mediatriz MM', pontos equidistantes dos pontos dados A e B segue-se que:

A tang. a uma \odot é a reta que tem somente um ponto comum com a \odot (§135); os demais pontos da tang. são exteriores em relação à mesma \odot . Portanto, para demonstrar que AB é tang. à \odot , basta demonstrar que qualquer ponto de AB, excetuando o ponto A, por exemplo, o ponto C, é exterior à \odot . Liguemos o centro da \odot ao ponto C. Sendo $OA \perp AB$, então OC é oblíqua à AB $\therefore OA < OC$. Sendo OA um raio e sendo $OC > OA$, o ponto C é um ponto exterior. Ora, se um ponto qualquer C da reta AB é exterior à \odot , se o único ponto comum à reta AB e à \odot é o ponto A, então a reta AB é realmente tang. à \odot .

RECÍPROCA. *Uma tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que termina no ponto de contacto.*

H. $\{ AB \text{ é tangente à } \odot$
de raio OA.

T. $\{ AB \perp OA$

Desde que AB é tang. à \odot de raio OA (fig. 91) no ponto A, segue-se que qualquer ponto da tang. AB, por exemplo, o ponto C, é exterior à \odot $\therefore OA < OC$. Ora, sendo OA menor do que qualquer outro segmento retilíneo que ligue o ponto O a qualquer ponto da reta AB, conclue-se que o segmento OA é a distância do ponto O à reta AB. Logo $OA \perp AB$.

140. Cordas paralelas. TEOREMA. *Duas secantes paralelas interceptam, em uma circunferência, arcos iguais.*

H. $\{ AB \parallel CD$

T. $\{ \text{arco AC} = \text{arco BD}$

Tracemos o raio OM \perp à corda AB. O prolongamento de OM, isto é, ON, será então \perp CD. (§102, 3.º corolário do postulado de Euclides) Sendo MN um diâmetro \perp às cordas AB e CD, divide estas cordas, assim como os arcos que elas subtendem, em duas partes iguais. (§136, 4.º teorema) Logo,

$$\text{arco MC} = \text{arco MD}$$

$$\text{arco MA} = \text{arco MB} \quad \therefore$$

$$\text{arco MC} - \text{arco MA} = \text{arco MD} - \text{arco MB} \quad \therefore$$

$$\text{arco AC} = \text{arco BD}$$

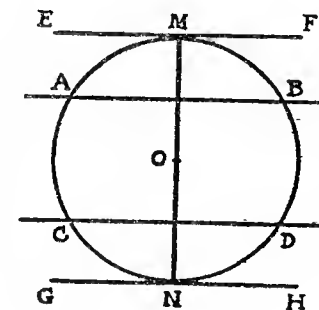


Fig. 92

PRIMEIRO COROLÁRIO. *Uma tangente e uma secante paralelas interceptam, em uma circunferência, arcos iguais.*

Sejam AB e EF uma sec. e uma tang. \parallel . (fig. 92) Liguemos o centro da \odot ao ponto de contacto da tang. Sendo $OM \perp$ à tang. EF (§142) sê-lo-á também à sec. AB, porque $AB \parallel EF$. (§105, 3.º corolário do postulado de Euclides) E sendo $OM \perp AB$, então arco MA = arco MB. (§136, 4.º teorema)

SEGUNDO COROLÁRIO. *Duas tangentes paralelas determinam em uma circunferência arcos iguais.*

Sejam EF e GH (fig. 92) duas tang. \parallel e tracemos uma sec. qualquer AB \parallel EF. A sec. AB será também \parallel GH. De acôrdo com o primeiro corolário, teremos:

$$\begin{aligned} \text{arco MA} &= \text{arco MB} \\ \text{arco NA} &= \text{arco NB} \quad \dots \\ \text{arco MA} + \text{arco NA} &= \text{arco MB} + \text{arco NB} \quad \dots \\ \text{arco MAN} &= \text{arco MBN} \end{aligned}$$

Observação. Sendo arco MAN = arco MBN, cada um destes arcos é a metade da \odot , donde se conclue que MN é um diâmetro. O segmento retilíneo que liga os pontos de contacto de duas tangentes \parallel é um diâmetro.

141. Distância de um ponto a uma circunferência. A \odot é uma linha. Considerando uma \odot de centro O e raio OA (fig. 93) e um ponto qualquer M, exterior ou interior a esta mesma \odot , qual é o menor segmento retilíneo que podemos traçar, ligando o ponto M a um ponto qualquer da \odot ? E qual é o maior? Em outras palavras, qual é a menor e a maior distância entre um ponto dado e uma \odot dada?

TEOREMA. *A menor e a maior distância entre um ponto dado e uma circunferência dada são dois segmentos retilíneos situados na secante que passa pelo ponto dado e pelo centro da circunferência dada. A menor distância é o segmento que começa no ponto dado e termina no primeiro ponto de intersecção da secante com a circunferência; a maior distância é o segmento que começa no ponto dado e termina no segundo ponto de intersecção da secante com a circunferência.*

Há dois casos a considerar, porque o ponto M pode ser exterior ou interior.

1.º caso. O ponto M é exterior. Tracemos a sec. MAB; liguemos o ponto M a um ponto qualquer C da \odot e vamos provar que:

$$T. \begin{cases} MA < MC \\ MB > MC \end{cases}$$

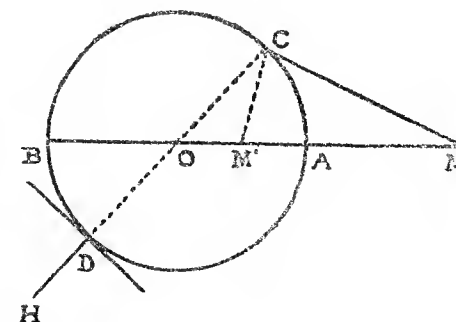


Fig. 93

Tracemos o raio OC. No $\triangle MOC$ temos:

1.º) $MO < MC + OC$	2.º) $MC < MO + OC$
Sendo $MO = MA + OA$, então	Sendo $OC = OB$, então
$MA + OA < MC + OC$	$MC < MO + OB$
Sendo $OA = OC$, resulta	$MC < MB$
$MA < MC$	$MB > MC$

2.º caso. O ponto M' é interior. Tracemos o diâmetro AM'B; liguemos o ponto M' a um ponto qualquer C da \odot e vamos provar que:

T. $\begin{cases} M'A < M'C \\ M'B > M'C \end{cases}$	Tracemos o raio OC. No $\triangle M'OC$ temos:
1.º) $M'C > OC - OM'$	2.º) $M'C < OC + OM'$
$M'C > OA - OM'$	$M'C < OB + OM'$
$M'C > M'A$	$M'C < M'B$
$M'A < M'C$	$M'B > M'C$

Dada uma curva qualquer MN; se traçarmos uma tang. a esta curva no ponto A, e uma \perp a esta tang. no mesmo ponto A, a \perp recebe o nome de *normal à curva no ponto A*.

No caso da \odot (fig. 93), se traçarmos uma tang. à curva no ponto D e uma \perp HD à tang. no mesmo ponto D, esta \perp , sendo prolongada, passará pelo centro. Donde se conclue que todas as normais a uma \odot passam pelo centro.

Pelo ponto M (fig. 93) exterior à \odot , tracemos as normais MA e MB; a primeira é a menor distância do ponto M à \odot , e a segunda é a maior distância do ponto M à mesma \odot .

Pelo ponto M' (fig. 93) interior à \odot , tracemos as normais $M'A$ e $M'B$; a primeira é a menor distância do ponto M' à \odot , e a segunda é a maior distância do ponto M' à mesma \odot .

Problema. Dada uma \odot de centro O e raio $OA=r$, determinar um ponto situado a uma distância d desta \odot .

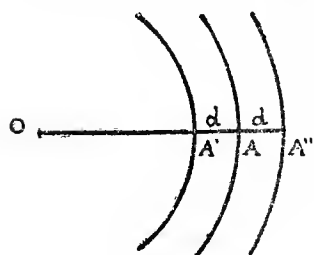


Fig. 94

Resolução. Traça-se um raio qualquer OA . Neste raio, convenientemente prolongado, marcam-se dois segmentos AA' e AA'' de modo que $AA'=AA''=d$. Os pontos A' e A'' são duas soluções do problema. E, considerando que o raio OA pode ser qualquer, conclue-se que o problema tem uma infinidade de soluções, isto é, há uma infinidade de pontos situados a uma distância dada de uma \odot dada.

O lugar geométrico dos pontos situados a uma distância dada d , de uma circunferência de raio r , é constituído por duas circunferências concêntricas com a primeira e cujos raios respectivos são $r+d$ e $r-d$.

Duas ou mais \odot são concêntricas quando têm o mesmo centro; não tendo o mesmo centro são excêntricas.

Coroa é a porção de superfície plana compreendida entre duas \odot concêntricas.

142. Circunferências secantes e tangentes. Duas \odot que têm três pontos comuns coincidem. (§138) Por dois pontos dados A e B podemos traçar duas ou mais \odot . (§138, problema, fig. 90) Logo, duas \odot cujos raios são respectivamente OA e $O'A$ (fig. 95) podem ter dois pontos comuns A e B . Quando duas \odot têm dois pontos comuns, A e B , são chamadas *secantes*. Com efeito, elas se atravessam, se cortam mutuamente nos pontos A

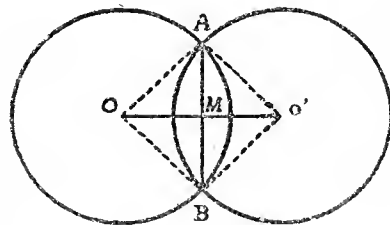


Fig. 95

e B . Ao segmento retilíneo que liga os centros das duas \odot dá-se o nome de *linha dos centros*; a corda AB , sendo comum às duas \odot , é chamada *corda comum*; os pontos A e B são chamados *pontos de intersecção das duas \odot* .

TEOREMA. Quando duas circunferências distintas têm um ponto comum que não está situado na linha dos centros, têm um segundo ponto comum também situado fora da linha dos centros, e simétrico do primeiro em relação a esta mesma linha.

Consideremos as \odot cujos raios são OA e $O'A$. (fig. 95) Seja A um ponto comum às duas \odot ; tracemos $AM \perp$ à linha dos centros OO' e prolonguemos AM de um comprimento MB tal que $MB=MA$. Em seguida, liguemos os pontos O e O' aos pontos A e B . Sendo $OO' \perp AB$ e sendo $MA=MB$, então OO' é a mediatriz do segmento AB . $\therefore OA=OB$ e $O'A=O'B$. Desde que $OA=OB$, a \odot de centro O e raio OA passa pelo ponto B ; desde que $O'A=O'B$, a \odot de centro O' e raio $O'A$ também passa por B . Nestas condições o ponto B é comum às duas \odot e não está situado na linha dos centros.

Corolários. I. Os pontos A e B são simétricos em relação à linha dos centros. (§116)

II. Além dos pontos A e B , as duas \odot não podem ter um terceiro ponto comum C , porque então coincidiriam e não seriam duas \odot distintas. (hip.)

III. A linha dos centros é \perp à corda comum.

TEOREMA. Quando duas circunferências distintas têm um ponto comum situado na linha dos centros, não têm nenhum outro ponto comum.

Consideremos as \odot cujos raios são OA e $O'A$ e que têm um ponto comum A , situado na linha dos centros OO' . (fig. 96) Se além do ponto A , estas duas \odot tivessem um segundo ponto comum B , situado fora da linha dos centros, então teriam um terceiro ponto comum B' , simétrico de B , em re-

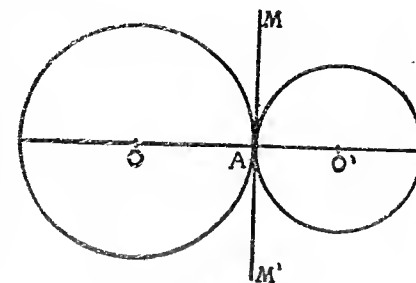


Fig. 96

lação à linha dos centros. Nesse caso, as duas \odot coincidiriam, o que é contrário à hipótese. Logo...

Duas \odot que têm somente um ponto comum são chamadas *tangentes*. O ponto comum é chamado *ponto de contacto*, e este ponto está situado na linha dos centros.

Corolário. Quando duas \odot são tangentes, elas têm uma tangente comum no ponto de contacto.

Com efeito, sendo MM' (fig. 96) \perp aos raios OA e $O'A$, no ponto A , MM' é tangente às duas \odot . (§139)

143. Posições mútuas de duas circunferências. Duas \odot distintas podem apresentar cinco posições relativas.

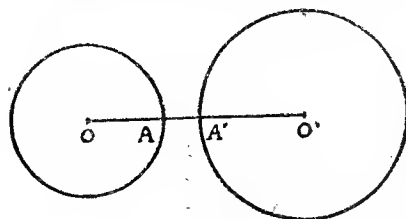


Fig. 97

1.ª posição. As duas \odot são *exteriores*, isto é, todos os pontos de uma são exteriores em relação à outra, e reciprocamente. (fig. 97) Quando duas \odot são exteriores, a linha dos centros é maior do que a soma dos raios. Com efeito, $OO' = OA + AA' + O'A' \therefore OO' > OA + O'A'$.

2.ª posição. As duas \odot são *tangentes exteriormente*, isto é, sendo exteriores, têm um ponto comum. (fig. 98) Quando duas \odot são tangentes exteriormente, a linha dos centros é igual à soma dos raios. Com efeito, estando o ponto de contacto situado na linha dos centros (§145), $OO' = OA + O'A'$.

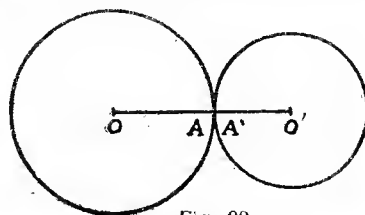


Fig. 98

3.ª posição. As duas \odot são *secantes*. (fig. 99)

Quando duas \odot são secantes, a linha dos centros é menor do que a soma dos raios e maior do que a diferença. Com efeito, ligando-se o ponto A ou A' aos dois centros, formaremos o $\triangle OAO'$ no qual $OO' < OA + O'A'$ ou $OO' > OA - O'A'$.

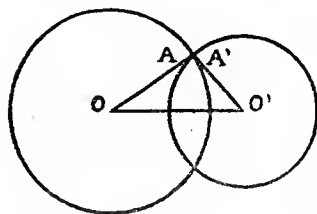


Fig. 99

4.ª posição. As duas \odot são *tangentes interiormente*, isto é, sendo os pontos de uma interiores em relação à outra, elas têm um ponto comum. (fig. 100)

Quando duas \odot são tangentes interiormente, a linha dos centros é igual à diferença dos raios. Com efeito, estando o ponto de contacto na linha dos centros, temos $OO' = OA - O'A'$.

5.ª posição. As duas \odot são *interiores*, isto é, todos os pontos de uma são interiores em relação à outra. (fig. 101)

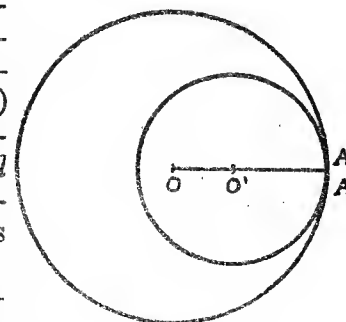


Fig. 100

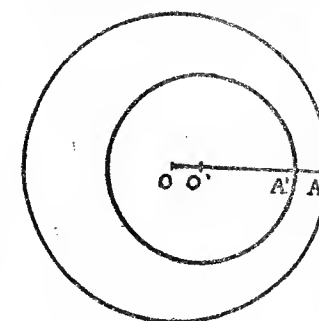


Fig. 101

Quando duas \odot são interiores, a linha dos centros é menor do que a diferença dos raios. Com efeito, $OO' = OA - O'A' - AA'$. E somando AA' ao segundo membro desta igualdade teremos: $OO' < OA - O'A' - AA' + AA' \therefore OO' < OA - O'A'$.

Duas \odot podem pois ocupar cinco posições distintas das quais resultam cinco relações diferentes entre a linha dos centros e os raios das duas \odot .

Estas cinco relações são os cinco teoremas que acabámos de demonstrar. Deixamos aos estudantes o cuidado de enunciarem as cinco recíprocas e demonstrá-las pela redução ao absurdo.

Recomendamos o terceiro teorema: para que duas \odot se cortem é necessário que a linha dos centros seja menor do que a soma dos raios e maior do que a diferença.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série XLIX.

144. Medida comum de duas grandezas da mesma espécie. Medida comum de duas grandezas da mesma espécie é uma terceira grandeza da mesma espécie que as duas primeiras e que está contida em cada uma delas um número exato de vezes.

Consideremos dois segmentos retilíneos AB e CD . (fig. 102) São duas grandezas da mesma espécie. Vamos determinar a

sua medida comum, isto é, um terceiro segmento que esteja contido um número exato de vezes em cada um dos segmentos AB e CD. Procederemos tal qual como em Aritmética, quando queremos determinar o m. d. c. de dois números.

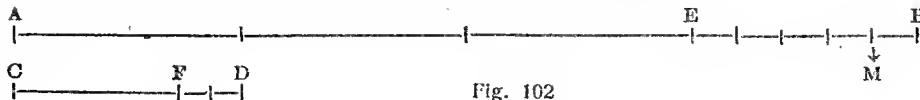


Fig. 102

Aplicamos o segmento menor CD sobre o segmento maior AB, tantas vezes quantas for possível. Admitindo que AB contém 3 vezes o segmento CD, havendo um resto, o segmento EB, teremos:

$$AB = 3CD + EB \quad (I)$$

Aplicamos o resto EB no segmento menor CD, tantas vezes quantas for possível. Admitindo que CD contém uma vez o segmento EB, havendo um resto, o segmento FD, teremos:

$$CD = 1EB + FD \quad (II)$$

Aplicamos o segundo resto FD no primeiro resto EB, tantas vezes quantas for possível. Admitindo que EB contém 4 vezes o segmento FD, havendo um resto, o segmento MB, teremos:

$$EB = 4FD + MB \quad (III)$$

Aplicamos o terceiro resto MB no segundo resto FD, tantas vezes quantas for possível. Admitindo que FD contém 2 vezes o segmento MB, sem deixar resto, teremos:

$$FD = 2MB \quad (IV)$$

Logo, MB é um segmento que está contido um número exato de vezes em cada um dos segmentos AB e CD, e é o maior, como se pode demonstrar facilmente, lembrando todos os teoremas que constituem em Aritmética a teoria do m.d.c.

Vejamos agora quantas vezes cada um dos segmentos AB e CD contém o segmento MB. Partindo da última igualdade (IV) teremos sucessivamente:

$$FD = 2MB$$

$$EB = 4FD + MB \dots EB = 4 \times 2MB + MB \dots EB = 9MB$$

$$CD = 1EB + FD \dots CD = 9MB + 2MB \dots CD = 11MB$$

$$AB = 3CD + EB \dots AB = 33MB + 9MB \dots AB = 42MB$$

Portanto, o segmento MB está contido 11 vezes no segmento CD, e 42 vezes no segmento AB.

De um modo análogo se determinará a medida comum de dois \angle , de dois arcos, de duas superfícies limitadas, etc..

Mas, nem sempre é completa a analogia com o problema aritmético; em Aritmética, a operação termina forçosamente, ao passo que, em Geometria, ela pode se prolongar indefinidamente, sem que se chegue à medida comum, que talvez não exista. (§ 146)

145. Razão de duas grandezas da mesma espécie. São dadas duas grandezas da mesma espécie, por exemplo, dois segmentos retilíneos AB e CD. (fig. 102) Qual a razão destes dois segmentos? Vimos que a medida comum dos segmentos AB e CD é o segmento MB; vimos mais que $AB = 42MB$ e $CD = 11MB$. Dividindo a primeira igualdade pela segunda, teremos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{42MB}{11MB} \dots \frac{AB}{CD} = \frac{42}{11}$$

Ora, $\frac{AB}{CD}$ é a razão dos segmentos AB e CD; $\frac{42}{11}$ é a razão dos números 42 e 11; estas duas razões são iguais. Logo,

A razão de duas grandezas da mesma espécie é igual à razão dos números que as representam, contanto que ambas sejam medidas com a mesma unidade.

A unidade é sempre uma grandeza da mesma espécie que as duas grandezas dadas.

Do exposto resulta que, para comparar dois segmentos, duas superfícies limitadas, dois arcos, dois \angle , etc., não é necessário aplicar-lhes o processo indicado no parágrafo 144, que é, aliás impraticável. Medem-se as duas grandezas dadas com a mesma unidade e, em lugar de comparar as duas grandezas, comparem-se os dois números obtidos, o que é a mesma coisa.

Exercícios em classe

1. Procurando-se a medida comum de dois arcos a e b obtiveram-se os seguintes resultados: $a = 3b + r$; $b = 5r + r'$; $r = 2r' + r''$; $r' = 4r''$. Qual é a razão dos arcos a e b ?

2. Procurando-se a medida comum de dois segmentos retilíneos AB e CD, obtiveram-se os seguintes resultados: $AB = 2CD + R$; $CD = 3R + R'$;

$R=4R'+R''$; $R'=2R''+R'''$; $R''=5R'''$. Qual é a razão dos segmentos AB e CD?

3. A razão de dois \angle é 0,7. Qual é a medida comum destes dois \angle ?

4. A razão de dois arcos é 24/18. Qual é a maior medida comum destes dois arcos?

146. Grandezas comensuráveis e incommensuráveis. Duas grandezas da mesma espécie são comensuráveis quando têm medida comum; são incommensuráveis quando não têm medida comum. Refletindo sobre o processo indicado para determinar a medida comum de duas grandezas da mesma espécie, temos a ilusão de que estas duas grandezas sempre são comensuráveis. Com efeito, desde que os restos vão diminuindo sucessivamente, chegará um momento em que o resto deixa de ser perceptível à nossa vista e somos levados a crer que este resto, pela sua pequenez, deve caber nas duas grandezas um número exato de vezes, e as duas grandezas são então comensuráveis. Entretanto, existem também grandezas incommensuráveis, como veremos mais tarde.

Sendo AB e CD duas grandezas da mesma espécie e incommensuráveis, não é possível determinar exatamente a sua razão; entretanto, podemos determinar esta razão, com erro inferior a uma quantidade dada, por falta e por excesso, por exemplo com erro inferior a 0,001.

Para melhor esclarecer este assunto, suponhamos que CD foi dividido em 1000 partes iguais, e que uma destas partes, a , coube 3627 vezes em AB, deixando um resto. Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} AB > 3627a \\ CD = 1000a \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} AB < 3628a \\ CD = 1000a \end{array} \right\} \dots$$

$$\frac{AB}{CD} > \frac{3627}{1000} \dots \frac{AB}{CD} < \frac{3628}{1000} \dots$$

$$\frac{AB}{CD} > 3,627 \dots \frac{AB}{CD} < 3,628$$

$$3,627 < \frac{AB}{CD} < 3,628 \dots$$

$$\frac{AB}{CD} = 3,627 \text{ (com erro inferior a 0,001 por falta)}$$

$$\frac{AB}{CD} = 3,628 \text{ (com erro inferior a 0,001 por excesso)}$$

Resolvamos agora o mesmo problema, de um modo geral, isto é, determinando a razão dos segmentos AB e CD com erro inferior a $\frac{1}{n}$.

Dividamos CD em n partes iguais e seja a uma destas partes. Suponhamos que a cabe em AB, m vezes, deixando um resto, r , necessariamente menor do que a . Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} AB > ma \\ CD = na \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} AB < (m+1)a \\ CD = na \end{array} \right\} \dots$$

$$\frac{AB}{CD} > \frac{ma}{na} \dots \frac{AB}{CD} < \frac{(m+1)a}{na} \dots$$

$$\frac{AB}{CD} > \frac{m}{n} \dots \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n}$$

Combinando as duas desigualdades finais, teremos:

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n}$$

A razão $\frac{AB}{CD}$ está compreendida entre as razões $\frac{m+1}{n}$ e $\frac{m}{n}$; a diferença entre estas duas razões é $\frac{1}{n}$; então a diferença entre $\frac{m+1}{n}$ e $\frac{AB}{CD}$ ou $\frac{m}{n}$ e $\frac{AB}{CD}$ é inferior a $\frac{1}{n}$.

Logo, $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$ (com erro inferior a $\frac{1}{n}$, por falta)

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m+1}{n} \text{ (com erro inferior a } \frac{1}{n} \text{, por excesso)}$$

147. O ângulo central. Ângulo central é o \angle cujo vértice está situado no centro de uma O . Os \angle AMB e CND são centrais. (fig. 103)

TEOREMA. Em uma O , ou em duas \odot iguais, a ângulos centrais iguais correspondem arcos iguais.

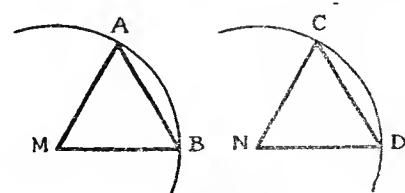


Fig. 103

$$H. \begin{cases} \hat{M} = \hat{N} \\ MB = ND \end{cases}$$

$$T. \begin{cases} \text{arco AB} = \text{arco CD} \end{cases}$$

Tracemos as cordas AB e CD e comparemos os $\triangle AMB$ e $\triangle CND$.

$\hat{M} = \hat{N}$ (hip.); $MA = MB = NC = ND$. Logo, $\triangle AMB = \triangle CND$ (2.º caso) $\therefore AB = CD$. E sendo $AB = CD \therefore \text{arco AB} = \text{arco CD}$. (§136, recíproca do 3.º teorema)

Observação. Enunciar e demonstrar o teorema contrário e os recíprocos.

Dêste teorema, do teorema contrário e dos recíprocos, resulta que, quando o \angle central aumenta, o arco compreendido entre seus lados também aumenta, e reciprocamente. Portanto, há uma relação entre os \angle s centrais e os arcos compreendidos entre seus lados, a qual está determinada no seguinte

TEOREMA. *A razão de dois ângulos quaisquer é igual à razão dos arcos compreendidos entre seus lados, tendo como centros respectivos os vértices dos dois ângulos, e traçados com o mesmo raio, aliás arbitrário.*

Sejam os \angle s AMB e CND. (fig. 104) Fazendo centro nos vértices M e N, tracemos os arcos AB e CD; o raio dêstes arcos pode ser qualquer; mas deve ser o mesmo para os dois arcos.

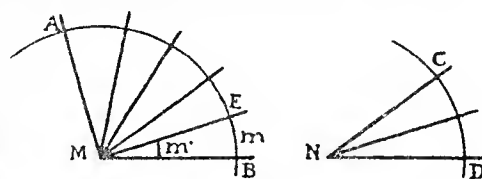


Fig. 104

Admitamos que os arcos AB e CD têm uma medida comum, isto é, um terceiro arco que está contido um número exato de vezes em cada um dos arcos AB e CD, e seja BE ou m este terceiro arco; supondo que o arco AB contenha 5 vezes o arco m e o arco CD contenha 2 vezes o mesmo arco m , teremos:

$$\begin{cases} \text{arco AB} = 5m \\ \text{arco CD} = 2m \end{cases} \therefore \frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} = \frac{5m}{2m} \therefore \frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} = \frac{5}{2} \quad (I)$$

Liguemos todos os pontos de divisão dos arcos AB e CD aos centros dêstes mesmos arcos, isto é, aos vértices M e N. Os

\angle M e N ficarão divididos respectivamente em 5 e 2 \angle s, e estes 7 \angle s serão todos iguais porque, em uma \odot ou em duas \odot s iguais, os arcos iguais correspondem \angle s centrais iguais. Um dêstes \angle s, por exemplo, o \angle BME ou m' , estando contido 5 vezes no \angle M e 2 vezes no \angle N, é uma medida comum dos \angle s M e N. Então,

$$\begin{cases} \hat{M} = 5m' \\ \hat{N} = 2m' \end{cases} \therefore \frac{\hat{M}}{\hat{N}} = \frac{5m'}{2m'} \therefore \frac{\hat{M}}{\hat{N}} = \frac{5}{2} \quad (II)$$

$$\text{De I e II deduzimos: } \frac{\hat{M}}{\hat{N}} = \frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} \quad \text{C. Q. D.}$$

Observação. Suponhamos que os arcos AB e CD são incomensuráveis. Dividamos o arco CD em n partes iguais; sendo a uma destas partes, teremos $\text{arco CD} = na$

Se os arcos AB e CD são incomensuráveis, o arco a está contido m vezes no arco AB, havendo um resto r , necessariamente menor do que a ; portanto,

$$\begin{array}{l|l} \begin{cases} \text{arco AB} > ma \\ \text{arco CD} = na \end{cases} & \begin{cases} \text{arco AB} < (m+1)a \\ \text{arco CD} = na \end{cases} \\ \hline \frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} > \frac{ma}{na} & \frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} < \frac{(m+1)a}{na} \\ \frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} > \frac{m}{n} & \frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} < \frac{m+1}{n} \end{array} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Combinado (1) e (2) (§ 146), teremos:

$$\frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} = \frac{m}{n} \quad (\text{com erro inferior a } \frac{1}{n}, \text{ por falta})$$

Unamos todos os pontos de divisão dos arcos AB e CD, aos respectivos centros. O \angle N ficará dividido em n \angle s iguais. E sendo a' um dêstes \angle s teremos:

$$\hat{N} = na'$$

Quanto ao \angle M, este \angle conterá m vezes o \angle a' , havendo um resto r' , necessariamente menor do que a' ; portanto, raciocinando como fizemos em relação aos arcos, teremos

$$\frac{\hat{M}}{\hat{N}} = \frac{m}{n} \quad (\text{com erro inferior a } \frac{1}{n}, \text{ por falta})$$

$$\text{Em resumo: } \begin{cases} \frac{\text{arco AB}}{\text{arco CD}} = \frac{m}{n} & (\text{com erro inferior a } \frac{1}{n}, \text{ por falta}) \\ \frac{\hat{AMB}}{\hat{CND}} = \frac{m}{n} & (\text{com erro inferior a } \frac{1}{n}, \text{ por falta}) \end{cases}$$

Portanto, a razão aproximada, com erro inferior a $\frac{1}{n}$, por falta, dos arcos AB e CD, assim como dos \angle AMB e CND, é a mesma, isto é, $\frac{m}{n}$.

A unidade para avaliar \angle , a unidade que se apresenta em primeiro lugar, é o \angle reto. (§ 84) A unidade para avaliar arcos deve ser um arco; o arco tomado como unidade pode ser qualquer; o décimo da \bigcirc , o centésimo, o milésimo, etc.. Mas, se o \angle central varia com o arco compreendido entre seus lados, e reciprocamente, surge desde logo esta questão: um \angle central sendo reto, o arco compreendido entre seus lados que fração é da \bigcirc ? E' o que vamos determinar.

Em uma \bigcirc qualquer (fig. 105) tracemos dois diâmetros \perp AB e CD. Formaremos assim 4 \angle retos AOC, COB, BOD e DOA. Estes quatro \angle sendo retos, são iguais; e sendo centrais, os arcos compreendidos entre seus lados, isto é, os arcos AC, CB, BD e DA, são iguais. Nestas condições, um destes arcos, por exemplo, o arco AC, é a quarta parte da \bigcirc , recebendo, por este motivo, o nome de **quadrante**. E concluímos que um \angle sendo reto, o arco compreendido entre seus lados e tendo como centro o vértice deste mesmo \angle , é um quadrante.

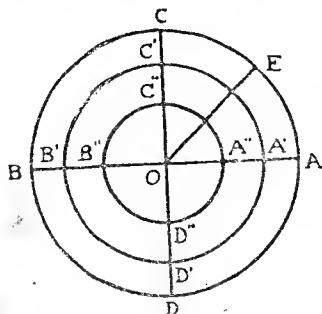


Fig. 105

Quanto ao raio da \bigcirc (fig. 105) pode ser qualquer; é o que a figura mostra claramente. Sejam AB e CD ou A'B' e C'D', os dois diâmetros \perp ; os quatro \angle centrais são sempre iguais, e o arco A'C' é também um quadrante como o arco AC.

Tomando-se o \angle reto como unidade para avaliar \angle , é conveniente tomar o quadrante para avaliar arcos. Esta conveniência resulta do seguinte

TEOREMA. Tomando o ângulo reto como unidade de ângulo, e o quadrante como unidade de arco, o número que mede um ângulo qualquer é igual ao número que mede o arco compreendido entre seus lados, tendo por centro o vértice deste mesmo ângulo.

Consideremos o \angle AOE. (fig. 105) De acôrdo com o teorema anterior,

$$\frac{\overset{\circ}{\text{AOE}}}{\overset{\circ}{\text{AOC}}} = \frac{\text{arco AE}}{\text{arco AC}} \dots \frac{\overset{\circ}{\text{AOE}}}{\text{um } \angle \text{ reto}} = \frac{\text{arco AE}}{\text{um quadrante}}$$

O primeiro membro desta igualdade exprime quantas vezes o \angle AOE contém a unidade de ângulo; é portanto um número. (§ 84) O segundo membro da mesma igualdade exprime quantas vezes o arco AE contém a unidade de arco; é também um número. E estes dois números são iguais.

Observação. E' hábito dizermos: o \angle A tem por medida o arco compreendido entre seus lados. E' um erro. Entretanto, esta expressão é admitida, desde que se compreenda bem o seu verdadeiro significado, a saber: o número que mede o \angle A é igual ao número que mede o arco compreendido entre seus lados, quando a unidade angular é o \angle reto, e a unidade de arco é o quadrante, ou, de um modo mais geral quando, tomando um ângulo central como unidade angular, a unidade de arco é o arco interceptado pelos lados deste mesmo ângulo, na \bigcirc cujo centro é o vértice do ângulo.

Quando dizemos que o \angle A tem 42°, não nos exprimimos bem. Deveríamos dizer que o \angle A é igual a $\frac{42}{90}$ do \angle reto. E' o arco compreendido entre os lados do \angle A que tem 42°. Mas, desde que o número que mede o \angle , $\left(\frac{42}{90} \text{ do } \angle \text{ reto}\right)$ é igual ao número que mede o arco, $\left(\frac{42}{90} \text{ do quadrante}\right)$ nós dizemos, indiferentemente, que o \angle ou o arco tem 42°.

De tudo o que dissemos neste parágrafo resulta:

O ângulo central tem por medida o arco compreendido entre seus lados.

148. O ângulo inscrito. Pelo ponto A, situado na \bigcirc de centro O, tracemos duas secantes que cortem a mesma \bigcirc respectivamente nos pontos E e D; o \angle EAD é chamado *ângulo inscrito*. (fig. 106) Os \angle EAB, EAC, BAD, CAD são \angle inscritos.

TEOREMA. O ângulo inscrito tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados.

Na demonstração devemos considerar três casos distintos.

1.º caso. Um dos lados do \angle inscrito passa pelo centro da \bigcirc .

Consideremos o \angle BAC, cujo lado AC passa pelo centro. Traçando o raio OB formaremos o \triangle AOB, isósceles, porque

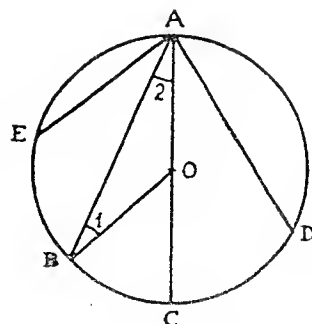


Fig. 106

$OA=OB$ como raios de uma mesma \odot ; donde $\hat{1}=\hat{2}$. O $\angle BOC$, sendo externo, em relação ao $\triangle AOB$, resulta que $\hat{BOC}=\hat{1}+\hat{2}$. (§109, II) E sendo $\hat{1}=\hat{2}$, então

$$\hat{BOC}=2 \times \hat{2} \dots \hat{2} = \frac{\hat{BOC}}{2}$$

Mas o $\angle BOC$, sendo central, tem por medida o arco BC; logo o $\angle 2$, sendo igual à metade do $\angle BOC$, terá por medida a metade do arco BC. Se o arco BC tiver, por exemplo, 48° , o $\angle 2$ ($\angle BAC$) terá 24° . (24 nonagésimos de um \angle reto)

2.º caso. O centro da \odot fica no interior do \angle .

Consideremos o $\angle BAD$. (fig. 106) Tracemos o diâmetro AC. De acôrdo com o 1.º caso, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{BAC} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BC}}{2} \\ \hat{CAD} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco CD}}{2} \end{array} \right\} \dots (\hat{BAC} + \hat{CAD}) \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BC} + \text{arco CD}}{2}$$

$$\hat{BAD} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BD}}{2}$$

3.º caso. O centro da \odot fica no exterior do \angle .

Consideremos o $\angle BAE$. Tracemos o diâmetro AC. De acôrdo com o 1.º caso, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{EAC} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco EC}}{2} \\ \hat{BAC} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BC}}{2} \end{array} \right\} \dots (\hat{EAC} - \hat{BAC}) \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco EC} - \text{arco BC}}{2}$$

$$\hat{BAE} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BE}}{2}$$

149. **Segmento circular.** Uma corda qualquer divide um círculo (superfície circular) em duas porções chamadas *segmentos circulares*. Portanto, *segmento circular* é a porção de círculo limitada por uma corda e pelo arco que ela subtende. A uma corda AB (fig. 107) correspondem sempre dois segmentos circulares, em geral desiguais. Se a corda é um diâmetro, os dois segmentos

são iguais; são semicírculos. Um \angle está inscrito em um segmento, quando seu vértice está no arco do segmento e seus lados passam pelas extremidades da corda do segmento. Os \angle ACB, ADB e AEB estão inscritos em um mesmo segmento. Do teorema anterior (§ 148) resultam os seguintes corolários, cuja demonstração deixamos aos estudantes.

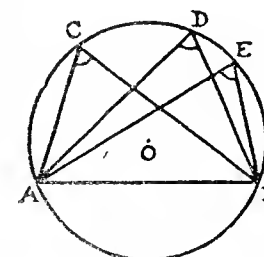


Fig. 107

I. Todos os \angle inscritos em um mesmo segmento são iguais.

II. Um \angle inscrito em um semicírculo é reto.

III. Todos os \angle inscritos em um segmento maior do que um semicírculo são agudos.

IV. Todos os \angle inscritos em um segmento menor do que um semicírculo são obtusos.

V. Uma corda divide um círculo em dois segmentos; se inscrevermos um \angle em cada um destes segmentos, os dois \angle serão supls.

150. **Ângulo formado por uma tangente e uma corda.**

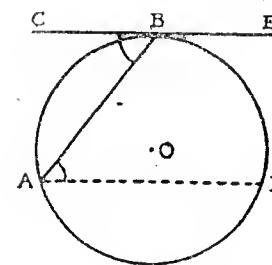


Fig. 108

Consideremos o $\angle ABC$, formado pela tangente BC, e pela corda AB. Vamos demonstrar que este \angle tem por medida a metade do arco AB subtendido pela corda AB. Tracemos a corda AD \parallel BC. Então arco AB = arco BD (§140, primeiro corolário) e $\hat{ABC} = \hat{BAD}$. (alt.-int. formados pelas \parallel AD e BC, etc.) Mas \hat{BAD} t. p. m. $\frac{\text{arco BD}}{2}$ ou $\frac{\text{arco AB}}{2}$. Logo, $\angle ABC$ tam-

bém terá por medida a metade do arco AB.

Observação. Na demonstração deste teorema, considera-se sempre o $\angle ABC$ porque, em relação a uma corda qualquer AB, o arco maior que ela subtende é sempre pôsto à margem. Entretanto, o $\angle ABE$ é também formado por uma tangente e por uma corda, tendo por medida a metade do arco ADB, como é fácil provar.

151. **Ângulos formados por secantes e tangentes.** Em uma \odot qualquer traçam-se duas cordas ou secantes AB e CD. (fig. 109) Formam-se quatro \angle s, o. p. v., dois a dois.

TEOREMA. O ângulo formado por duas cordas ou secantes que se cortam no interior de uma circunferência, tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados, mais a metade do arco compreendido entre os lados do ângulo que lhe é oposto pelo vértice.

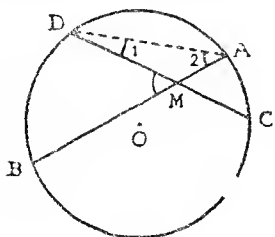


Fig. 109

Considerando um dos quatro \angle s cujo vértice é o ponto M, por exemplo o \angle BMD, é necessário demonstrar que este \angle tem por medida a semissoma dos arcos BD e AC.

Traçamos a corda AD, formando o \triangle AMD. Em relação a este \triangle , o \angle BMD é um \angle externo; logo,

$$\hat{BMD} = \hat{1} + \hat{2} \quad (\S 109, 2.^\circ \text{ corolário})$$

$$\text{Mas, } \hat{1} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco AC}}{2} \text{ e } \hat{2} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BD}}{2} \quad (\S 151)$$

$$\text{Donde resulta que } \hat{BMD} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco AC} + \text{arco BD}}{2}$$

TEOREMA. O ângulo formado por duas secantes que se cortam em um ponto exterior a uma circunferência, tem por medida a semidiferença dos arcos que seus lados interceptam na mesma circunferência.

Consideremos o \angle A formado pelas secantes ABC e ADE; vamos demonstrar que este \angle tem por medida a semidiferença dos arcos CE e BD. Traçamos a corda EB, formando o \triangle EBA. Em relação a este \triangle , o \angle 1 é um \angle externo; então $\hat{1} = \hat{2} + \hat{A}$
 $\therefore \hat{A} = \hat{1} - \hat{2}$.

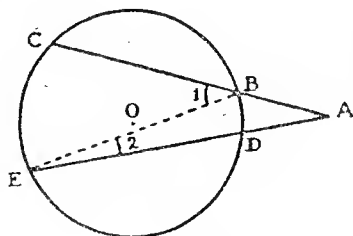


Fig. 110

$$\text{Mas, } \hat{1} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco CE}}{2} \text{ e } \hat{2} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BD}}{2} \quad (\S 148)$$

$$\text{Donde resulta que } \hat{A} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco CE} - \text{arco BD}}{2}$$

COROLÁRIO. O ângulo formado por uma tangente e uma secante qualquer tem por medida a semidiferença dos arcos que seus lados interceptam na mesma circunferência.

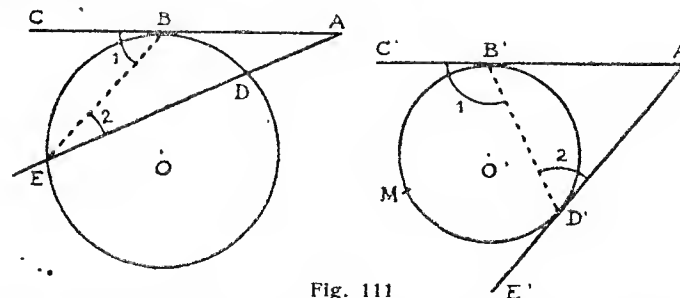


Fig. 111

Consideremos o \angle A; este \angle tem por medida a semidiferença dos arcos BE e BD. Traçamos a corda EB, formando o \triangle EBA. Em relação a este \triangle , o \angle 1 é um \angle externo; logo,

$$\hat{1} = \hat{2} + \hat{A} \quad \therefore \hat{A} = \hat{1} - \hat{2}$$

$$\text{Mas, } \hat{1} \text{ t.p.m. } \frac{\text{arco BE}}{2} \quad (\S 150) \text{ e } \hat{2} \text{ t.p.m. } \frac{\text{arco BD}}{2} \quad (\S 148)$$

$$\text{Logo, } \hat{A} \text{ t.p.m. } \frac{\text{arco BE} - \text{arco BD}}{2}$$

Observação. O \angle formado por duas tangentes A'B'C' e A'D'E' a uma mesma \odot (fig. 111) t. p. m. a semidiferença dos arcos compreendidos entre seus lados, isto é, $\frac{\text{arco B'MD'} - \text{arco B'D'}}{2}$, como é fácil de demonstrar.

152. **Segmento capaz.** Os \angle s ACB, ADB e AEB (fig. 107) inscritos em um mesmo segmento, são iguais porque têm a mesma medida, isto é, a metade do arco AB. Se o \angle ACB tem 48° , todos os \angle s inscritos no mesmo segmento têm também 48° . Dizemos em Geometria que o segmento é capaz de um \angle de 48° .

Segmento capaz de um \angle dado é um segmento tal que todos os \angle s nele inscritos são iguais ao \angle dado.

Existe sempre um segmento capaz de um \angle dado, isto é, dado um \angle , podemos construir um segmento tal que os \angle s nele inscritos sejam iguais ao ângulo dado. (§ 158)

Suponhamos um observador colocado no ponto C do arco ACB. (fig. 112) Se ele visar o ponto A e depois o ponto B, as duas visadas formarão um $\angle ACB$ que tem por medida a metade do arco AB. Dizemos em Geometria que o observador, colocado no ponto C, vê a corda AB ou o segmento retilíneo AB sob o $\angle ACB$.

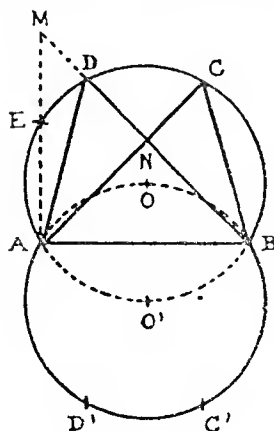


Fig. 112

A corda AB divide esta \odot e o círculo em dois segmentos, e todos os \angle inscritos no segmento maior são iguais ao $\angle ACB$. Portanto, há uma infinidade de pontos de onde se vê o segmento AB sob um \angle dado, e estes pontos estão situados no arco ADCB. Procuremos fora deste arco, pontos de onde se veja o segmento AB sob o $\angle ACB$. Considerando o ponto exterior M, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco AB}}{2} \\ \hat{M} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco AB}}{2} - \frac{\text{arco DE}}{2} \quad (\S 151) \end{array} \right\} \dots \hat{M} < \hat{C}$$

Considerando o ponto interior N, teremos:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco AB}}{2} \\ \hat{N} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco AB}}{2} + \frac{\text{arco CD}}{2} \quad (\S 151) \end{array} \right\} \dots \hat{N} > \hat{C}$$

Donde se conclue que, seja qual for o ponto escolhido no arco AEDCB, veremos sempre o segmento AB sob um \angle dado ACB, ao passo que, se nos colocarmos no exterior ou no interior

da \odot , veremos o segmento AB sob um $\angle M$, menor do que o $\angle C$, ou um $\angle N$, maior do que o $\angle C$. Portanto,

O lugar geométrico dos pontos de onde se vê um segmento dado sob um \angle dado, é um arco do qual o segmento dado é corda.

Construindo o arco simétrico do arco AEDCB, em relação à corda AB (§ 116), isto é, o arco AD'C'B (fig. 112) e se nos colocarmos em qualquer ponto deste arco, a corda AB será vista também sob o mesmo $\angle ACB$ ou $\angle AC'B$. Portanto, o lugar geométrico em questão se compõe, na realidade, de dois arcos simétricos em relação ao segmento AB. (§ 158)

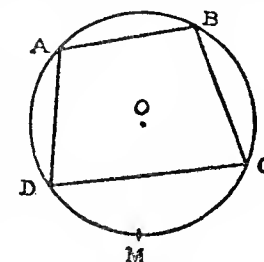


Fig. 113

153. O quadrilátero inscrito. Um quadrilátero ABCD está inscrito em uma \odot quando seus vértices estão situados na \odot ; então seus lados são cordas da mesma \odot , e a \odot está circunscrita ao quadrilátero.

TEOREMA. Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito são suplementares.

$$H. \left\{ \begin{array}{l} \text{O quadrilátero ABCD está} \\ \text{inscrito em uma } \odot. \end{array} \right. \quad T. \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{C} = 2 \text{ retos} \\ \hat{B} + \hat{D} = 2 \text{ retos} \end{array} \right.$$

$$\hat{A} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BCD}}{2}$$

$$\hat{B} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco ADC}}{2}$$

$$\hat{C} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco BAD}}{2} \dots$$

$$\hat{D} \text{ t. p. m. } \frac{\text{arco ABC}}{2} \dots$$

$$\hat{A} + \hat{C} \text{ t. p. m. } \frac{\odot}{2} \dots$$

$$\hat{B} + \hat{D} \text{ t. p. m. } \frac{\odot}{2} \dots$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 2 \text{ retos.}$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 2 \text{ retos.}$$

RECÍPROCA. Se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares, este quadrilátero é inscrito.

$$\text{H. } \begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 2 \text{ retos.} \\ \hat{B} + \hat{D} = 2 \text{ retos.} \end{cases} \quad \text{T. } \begin{cases} \text{O quadrilátero } ABCD \\ \text{é inscritível.} \end{cases}$$

Pelos vértices A, B e C façamos passar uma \odot ABCMA. O $\angle D$, sendo suplemento do $\angle B$, tem por medida a metade do arco ABC. Então o vértice do $\angle D$ está situado no arco AMC porque é somente neste arco que existem pontos de onde se vê a corda AC sob um \angle que tenha por medida a metade do arco ABC.

Observação. O \square e o losango não podem ser inscritos em uma \odot ; o mesmo acontece com um trapézio qualquer. O retângulo, o trapézio simétrico e o quadrado são inscritíveis.

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série L.

CAPÍTULO IX

Construções Geométricas

154. *Definições e métodos.* *Problema gráfico* ou de *construção*, é o problema no qual se pede a *construção*, o *desenho* de uma figura que satisfaça a certas e determinadas condições.

As condições impostas pelo problema são chamadas *dados*, os quais consistem na *grandeza* e na *posição* dos elementos geométricos com os quais devemos resolver o problema proposto.

A solução do problema é a figura obtida, e que satisfaz às condições impostas pelo mesmo problema.

Nos problemas gráficos de Geometria Elementar, as linhas empregadas são a reta e a \odot ; portanto, os *instrumentos fundamentais para a resolução destes problemas* são a *régua* e o *compasso*.

Quanto aos métodos empregados para resolver problemas gráficos, são apenas dois: o *sintético* e o *analítico*.

Quando vemos imediatamente como resolver o problema, fazemos a construção e justificamos o resultado, isto é, provamos que ela está de acordo com as condições impostas pelo problema; *este é o método sintético*.

Quando não vemos de pronto como resolver o problema, imaginamo-lo resolvido, isto é, desenhamos uma figura mais ou menos nas condições que o problema lhe impõe; depois estudamos esta figura, *analisamo-la*, para que possamos descobrir o caminho que nos permitirá resolver o problema; *este é o método analítico*.

155. *Traçado do hexágono regular inscrito.* Um polígono ABCDEFA está inscrito em uma \odot quando seus vértices estão situados nesta \odot ; então seus lados são cordas. Quanto à \odot , dizemos que ela é ou está circunscrita ao polígono.

Vejamos como se constrói um hexágono regular inscrito.

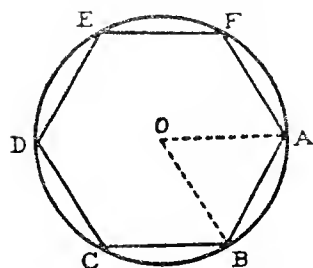


Fig. 114

tanto, 60° , e o \angle central AOB, tendo por medida o arco AB, (§147) é um \angle de 60° .

Isto pôsto, analisemos o $\triangle AOB$. Sendo $OA=OB$ como raios de um mesmo círculo, o $\triangle AOB$ é isósceles, donde $\angle OAB = \angle OBA$. (§94) Sendo a soma dos três \angle s de um \triangle igual a dois retos ou 180° , se o $\angle AOB$ tem 60° , os \angle s OAB e OBA medem juntos 120° . Mas êstes dois \angle s são iguais; logo, cada um dêles mede 60° . Nestas condições, os três \angle s do \triangle são iguais, o \triangle é *equiângulo* e, portanto, *equilátero*. (§94, corolário) Donde resulta que $OA=AB$, isto é:

O lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência é igual ao raio da mesma circunferência.

Construção. Para traçar um hexágono regular inscrito em uma \bigcirc dada, é bastante inscrever nesta \bigcirc cordas consecutivas iguais ao raio.

Observação. Escolhemos êste problema para iniciar a série dos problemas gráficos, pelas suas numerosas aplicações.

156. Traçado de perpendiculares. Problema I. Traçar a mediatriz de um segmento dado.

Êste problema já foi resolvido. (§91, 1.º exercício) Convém acrescentar que o raio AM igual ao raio BM, deve ser maior que a metade do segmento AB. Com efeito, para que as duas \odot se cortem, é necessário que $AB < AM + BM$. (§143, 3.ª posição)

Problema II. Traçar uma \perp a um segmento dado e que passe pelo centro do mesmo segmento. (§91, 2.º exercício)

Problema III. Dividir um segmento retilíneo em duas partes iguais. (§91, 3.º exercício)

Problema IV. Dividir um segmento retilíneo em 2, 4, 8, 16, 32, etc., partes iguais, isto é, em 2^n partes iguais.

Problema V. Traçar uma \perp a uma reta dada, por um ponto dado nesta mesma reta. (§91, 5.º exercício)

Problema VI. Traçar uma \perp a uma reta dada, por um ponto dado fora da reta.

Já foi resolvido. (§91, 7.º exercício) Convém acrescentar que, depois de traçado o arco MN (fig. 31) a mediatriz do segmento MN passará pelo ponto C. (§136, 4.º teorema, recíproca)

Problema VII. Traçar uma \perp a uma semirreta AX, pelo ponto A.

Primeiro processo. Traça-se a semirreta AY oposta à semirreta AX. A' direita e à esquerda do ponto A tomam-se na reta XY dois segmentos iguais AB e AC. Em seguida, traça-se a mediatriz do segmento BC.

Segundo processo. Às vêzes não é possível prolongar a semirreta AX. (fig. 115) Escolhe-se um ponto qualquer M do plano e com o raio MA traça-se uma \bigcirc que corte a semirreta AX num ponto B. Traça-se o diâmetro BC e liga-se o ponto C ao ponto A. A reta AC será \perp à semirreta AX. Com efeito, o $\angle A$, inscrito em um semicírculo, é um \angle reto; (§149, 2.º corolário) donde $AC \perp AX$.

Terceiro processo. Fazendo-se centro no ponto A e com um raio qualquer, traça-se a semicircunferência BY. (fig. 116) Com o

mesmo raio AB inscrevem-se nesta \bigcirc as duas cordas consecutivas BC e CD. Então cada um dos arcos BC e CD tem 60° . (§155) Se traçarmos a mediatriz do segmento CD, esta passará pelo centro A, do arco BCDY (§136, 4.º teorema, recíproca) e dividirá o arco CD em duas par-

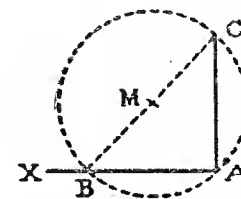


Fig. 115

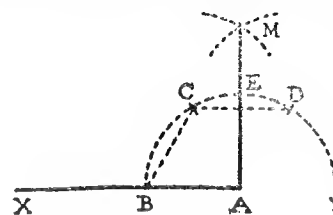


Fig. 116

tes iguais (§136, 4.º teorema); donde arco CE=arco ED. Traçemos então a mediatriz MA, do segmento CD, e consideremos o \angle MAX. Este \angle é central em relação à O BCDY. Logo, tem por medida o arco BE. (§147) Ora:

$$\text{arco BE} = \text{arco BC} + \text{arco CE} \quad \dots$$

$$\text{arco BE} = \text{arco BC} + \frac{\text{arco CD}}{2} \quad \dots$$

$$\text{arco BE} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ \therefore \text{MA} \perp \text{AX}$$

Este processo é o mais rápido na prática; não é necessário traçar as cordas BC e CD; escolhe-se um raio qualquer AB, e depois:

1.º tempo: traça-se o arco BY;

2.º tempo: centrando em B, marca-se o ponto C;

3.º tempo: centrando em C, marca-se o ponto D e traça-se um dos arcos que vai determinar o ponto M;

4.º tempo: centrando em D, traça-se o segundo arco que vai determinar o ponto M.

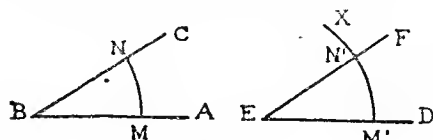


Fig. 117

157. Construção de ângulos. *Problema I.* E' dado o \angle ABC e pede-se um \angle igual. Traça-se uma semirreta ED. Fazendo centro nos pontos B e E, com o mesmo raio, traçam-se os arcos MN e M'X. Em se-

guida, marca-se no arco M'X um ponto N' tal que arco MN = arco M'N'. Unindo-se o ponto E ao ponto N', o \angle DEF será igual ao \angle ABC. (§147, recíproca do 1.º teorema)

Problema II. Traçar a bissetriz de um \angle dado, ou dividir um \angle dado em duas partes iguais.

Seja AOB (fig. 128) o \angle dado. Fazendo centro no vértice do \angle e com um raio qualquer, traça-se o arco MN. Em seguida, traça-se a corda MN e uma \perp a esta corda e que passe pelo centro da mesma. Esta \perp passa pelo vértice do \angle e divide a corda e o arco em duas partes iguais. (§136) Os \angle centrais MOC e NOC têm por medida os arcos MC e NC (§147); se

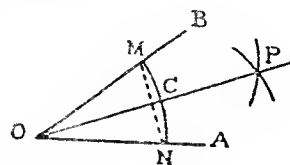


Fig. 118

os dois arcos são iguais, os dois \angle s são também iguais e OP é realmente a bissetriz do \angle AOB.

Na prática é inútil traçar o arco MN e a corda MN; é bastante marcar os pontos M e N de modo que OM=ON e, depois, determinar um ponto P equidistante dos pontos M e N.

Problema III. Dividir um \angle dado em 2, 4, 8, 16, 32, etc., partes iguais, isto é, em 2^n partes iguais.

Observação. Demonstra-se que não é possível resolver o problema da triseção de um \angle qualquer, somente com a régua e o compasso. Triseção de um \angle significa divisão em três partes iguais.

Problema IV. Construção de um \angle de 90° , 60° , 30° , 15° , 45° , 135° , 150° , etc..

Traça-se uma reta qualquer AB, e uma semirreta CD \perp AB; os \angle s ACD e BCD são retos e têm, portanto, 90° cada um.

Com centro em C e raio qualquer traça-se o arco MN. Fazendo centro no ponto M, e com o mesmo raio, determina-se o ponto E. O arco ME tem 60° (§158); portanto o \angle central MCE tem 60° .

Se quisermos construir um \angle de 30° , traçaremos o arco MN. Fazendo centro no ponto N, e com o mesmo raio, determinaremos o ponto F. Se o arco FN tem 60° , o arco MF tem 30° ; logo, o \angle central MCF tem 30° .

Observação. Do exposto se deduz o processo para dividir um \angle reto em três partes iguais; portanto, a triseção de um ângulo reto pode ser feita facilmente com a régua e o compasso.

Traçando a bissetriz de um \angle de 30° , cada uma das metades será um \angle de 15° .

Se quisermos traçar um \angle de 45° , é bastante traçar um \angle reto BCD e, em seguida, dividi-lo em duas partes iguais.

Se traçarmos, depois, a bissetriz de uma destas metades, teremos um \angle de $22^\circ 30'$.

Problema V. Dados dois \angle s de um Δ , construir o terceiro.

Sejam A e B os dois \angle s dados. Numa reta XY, escolhe-se

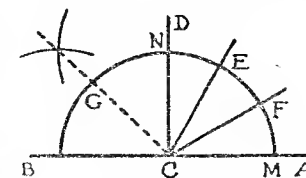


Fig. 119

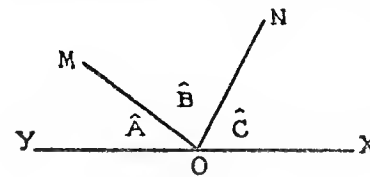


Fig. 120

um ponto qualquer, O. Tomando-se OY como lado e O como vértice, constrói-se o $\angle MOY = \angle A$. Tomando-se OM como lado e o mesmo vértice O, constrói-se $\angle MON = \angle B$. Logo, o $\angle C$ é o terceiro \angle do \triangle porque $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2$ retos. (§86, 1.º corolário; §109)

158. Construção do segmento capaz de um ângulo dado.

Problema I. Construir um segmento capaz de um \angle dado. Seja A o \angle dado. Constrói-se $\angle M = \angle A$. Cortam-se os lados do $\angle M$ por uma transversal

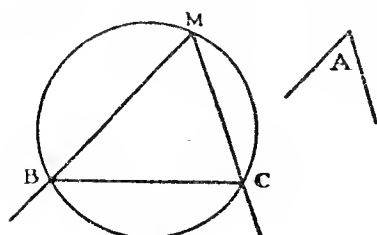


Fig. 121

qualquer BC, e faz-se passar uma \odot pelos pontos M, B e C. O $\angle M$ tem por medida a metade do arco BC, e todos os \angle s inscritos no segmento BMC são iguais ao $\angle M$; sendo $\hat{M} = \hat{A}$, o segmento BMC é o segmento capaz do $\angle A$.

Entretanto, este problema é indeterminado; desde que a transversal BC pode ocupar uma posição qualquer, conclue-se que o problema tem uma infinidade de soluções.

Problema II. Construir o segmento capaz de um \angle dado, tendo por corda um segmento retilíneo dado, em grandeza e posição. Seja BC o segmento dado e A o \angle dado. Suponhamos o problema resolvido e seja BMC o segmento pedido, isto é, capaz do $\angle A$. (§152)

Tudo consiste em determinar o centro do arco BMC. Sendo BC uma corda deste arco, o centro está situado na \perp EF à corda BC, traçada pelo centro desta mesma corda. (§136, recíproca do 4.º teorema)

Tracemos pelo ponto C a tangente CD; o $\angle BCD$ terá por medida a metade do arco BC (§150), e será então igual ao $\angle M$ e, portanto, ao $\angle A$. E sendo CD tangente à \odot no ponto C, se traçarmos $CH \perp CD$, esta \perp passará pelo centro

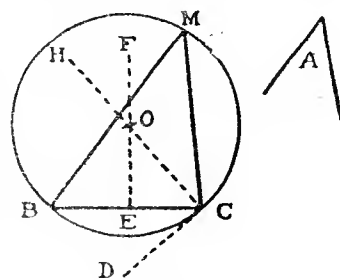


Fig. 122

do arco BMC. (§139) Logo, o centro deste arco, devendo estar situado nas semirretas EF e CH, é o ponto de intersecção das mesmas, isto é, o ponto O.

Construção. Tomando BC como lado e o ponto C como vértice, constrói-se $\hat{BCD} = \hat{A}$. Pelo meio de BC traça-se EF \perp BC, e pelo ponto C traça-se CH \perp CD. Fazendo centro no ponto O e com o raio OB traça-se uma \odot . O arco BMC desta \odot é o arco de segmento capaz do $\angle A$; este arco e o seu simétrico em relação ao segmento BC, constituem o lugar geométrico dos pontos de onde se vê o segmento BC sob um ângulo dado A. (§152)

159. Construção de triângulos. Problema I. Construir um \triangle , dados os três lados.

Observação. No caso presente supõe-se que os três lados não são dados pelos seus valores numéricos, isto é, pelos seus comprimentos; são dados pelos seus valores geométricos, isto é, são três segmentos retilíneos não medidos aos quais chamaremos a, b e c. Lembremos que o problema é impossível se tivermos um lado qualquer, por exemplo, $a > b + c$ ou $a < b - c$. (§95)

Sejam a, b e c os três lados dados.

Traçamos um segmento $BC = a$. E' necessário agora determinar a posição do vértice A. Se a distância do vértice B ao vértice A é o segmento c, fazemos centro no vértice B e, com um raio igual ao segmento c, traçamos uma \odot . (§133) Se a distância do vértice C ao vértice A é o segmento b, fazemos centro no vértice C e com um raio igual ao segmento b, traçamos uma segunda \odot . O vértice A

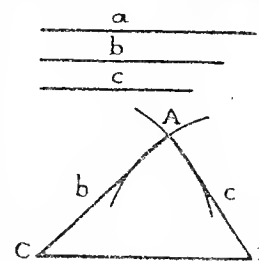


Fig. 123

é o ponto de intersecção das duas \odot , e o \triangle pedido é o $\triangle ABC$.

Problema II. Construir um \triangle , dados um lado e os dois \angle s adjacentes a este lado.

Seja a o lado dado e, B e C, os \angle s dados. Traça-se um segmento $BC = a$; em seguida, tomando BC como lado e os pontos B e C como vértices, traçam-se dois \angle s que sejam iguais, respectivamente, aos \angle s dados B e C. Os lados BA e CA destes dois \angle s se encontram em um ponto A, e o \triangle pedido é o $\triangle ABC$.

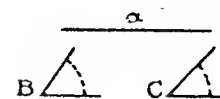


Fig. 124

AB. A reta EOC corta a \odot nos pontos E e D. Pelos pontos E e D traçam-se MN e M'N' \perp ED; estas duas \perp serão tangentes à \odot (§139) e serão \parallel à AB. (§102)

Problema III. Traçar uma tangente a uma \odot dada e \perp a uma reta dada.

Seja GF a reta dada. (fig. 129) Traça-se o diâmetro RS, paralelo à reta dada. Pelos pontos R e S traçam-se RP e SP' \perp RS; estas duas \perp à RS serão também \perp à FG (§102, 3.º corolário do postulado de Euclides), e serão tangentes à \odot . (§142)

Problema IV. Por um ponto dado fora de uma \odot , traçar uma tangente à mesma \odot . (fig. 130)

Seja O o centro da \odot dada e A o ponto dado. Une-se o ponto A ao centro da \odot e sobre AO como diâmetro traça-se uma \odot auxiliar, a qual corta a \odot dada nos pontos B e C.

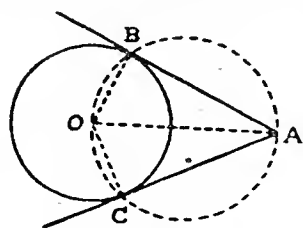


Fig. 130

Une-se o ponto A aos pontos B e C. As retas AB e AC são tangentes à \odot de centro O. Para prová-lo, traçam-se os raios OB e OC. Os \angle ABO e ACO são retos. (§149, 2.º corolário) Logo, AB e AC são respectivamente \perp aos raios OB e OC nas suas extremidades. Então AB e AC são tangentes à \odot de centro O, nos pontos B e C. (§139)

E' fácil provar que as tangentes AB e AC são iguais, e formam \angle iguais com o segmento AO.

Problema V. Circunscrever uma \odot a um \triangle dado.

Circunscrever uma \odot a um \triangle dado é traçar uma \odot que passe pelos três vértices do \triangle . Este se diz *inscrita* na \odot que, por sua vez, se diz *circunscrita* ao \triangle . Para resolver este problema é bastante determinar o ponto de concurso das mediatrizes do \triangle (§121) e, em seguida, fazendo centro no ponto P (fig. 78) e, com o raio PA, traçar uma \odot que passará também pelos pontos B e C.

Problema VI. Inscrever uma \odot em um \triangle dado.

Uma \odot está *inscrita* em um \triangle , quando os lados do \triangle são tangentes à \odot . Para resolver o problema proposto, determina-se o ponto de concurso das bissetrizes do \triangle (§123) e, em seguida, fazendo centro no ponto P (fig. 70) e com o raio PD,

traça-se uma \odot que passará pelos pontos D' e D'' porque PD = PD' = PD''. Estes três segmentos sendo \perp aos lados do \triangle , e sendo raios da \odot traçada, os lados do \triangle são tangentes à \odot . A \odot está *inscrita* no \triangle e este está *circunscrito* à \odot .

Observação. Para exercícios, vide E.M.T.A. do mesmo autor, série LI.

163. Igualdade de figuras planas. No §97 apresentamos a teoria da igualdade dos \triangle , de acordo com a grande maioria dos autores clássicos. Entretanto, o assunto merece algumas considerações que vamos expor nesta nota.

Duas figuras planas são iguais quando podem ser superpostas, de modo que todos os pontos de uma coincidam com todos os pontos da outra. (Por esta definição deve entender-se que cada ponto A de uma delas coincide com um ponto A' da outra, e reciprocamente).

Quando duas figuras planas e iguais, F e F', estão situadas em um mesmo plano, a superposição delas se pode fazer de dois modos diferentes; ou fazendo a figura F' *deslizar* sobre o plano, sem sair dele, até coincidir com a figura F; ou fazer a figura F' sair do plano comum às duas figuras, *girar no espaço*, e voltar de novo ao mesmo plano, isto é, fazendo o que se chama *um rebatimento da figura F'* e, finalmente, levar esta mesma figura F' a coincidir, *deslizando* sobre o plano, com a figura F.

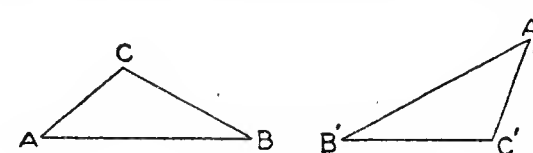


Fig. 131

Os dois casos são essencialmente distintos. Consideremos, por exemplo, os dois \triangle *iguais* ABC e A'B'C' (fig. 131); fazendo o \triangle A'B'C' *deslizar* sobre o plano, faremos os vértices A', B' e C' coincidir, respectivamente, com os vértices A, B e C. Entretanto, isto não é possível com os \triangle ABC e A'B'C' (fig. 132); os dois \triangle sendo *iguais*, coincidirão somente se efetuarmos o *rebatimento* de um deles. Com efeito, podemos fazer A'B' coincidir com AB (fig. 132) mas, se não efetuarmos o rebatimento de um dos \triangle , os pontos C e C' não coincidirão, ficando de um e do outro lado de A'B' (que está coincidindo com o seu igual AB).

Percorramos os contornos dos $\triangle ABC$ e $A'B'C'$ (fig. 141) partindo dos pontos A e A', e de acôrdo com a ordem alfabética (A, B, C, A); veremos que os dois percursos são realizados *no mesmo sentido*, isto é, no sentido contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio. Se, partindo dos pontos A e A', fizermos os mesmos percursos, contrariando a ordem alfabética (A, C, B, A) os dois percursos ainda serão realizados *no mesmo sentido*, isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio. E diremos que os $\triangle ABC$ e $A'B'C'$ (fig. 131) são *do mesmo sentido*.

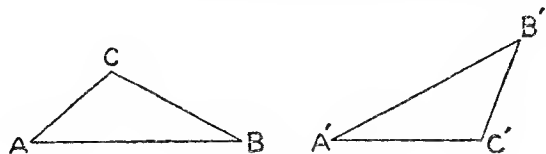


Fig. 132

Entretanto, já não acontece o mesmo com os $\triangle ABC$ e $A'B'C'$ (fig. 132). Executando os mesmos movimentos realizados com os $\triangle ABC$ e $A'B'C'$ (fig. 131) verificaremos facilmente que estes movimentos são de sentidos contrários. E diremos que os $\triangle ABC$ e $A'B'C'$ (fig. 132) são *de sentidos opostos*.

No primeiro caso (fig. 131) a *igualdade dos dois \triangle é direta*; no segundo caso (fig. 132) é *inversa*.

De um modo geral, quando a *igualdade* de duas figuras planas, e situadas no mesmo plano, é *direta*, a coincidência de ambas se realiza fazendo uma delas *deslizar* no plano; se a *igualdade é inversa*, é necessário o *rebatimento* de uma das figuras, para que se realize a coincidência das duas.

Há, por exceção, figuras planas iguais, cuja igualdade é indiferentemente *direta* ou *inversa*: dois \triangle isósceles iguais, duas \odot com os raios iguais, etc..